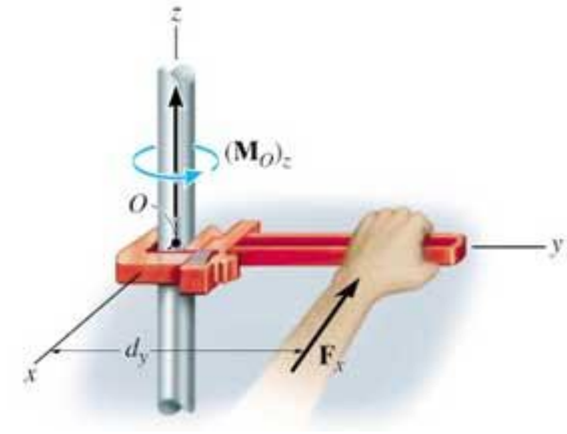
PAR DE FUERZAS Y SISTEMAS EQUIVALENTES



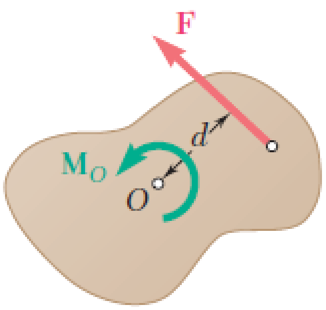
MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

El momento siempre es perpendicular al plano de acción de la fuerza y la distancia.

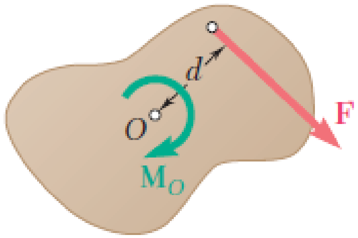
$$M_O = rF \text{ sen } \theta = Fd$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

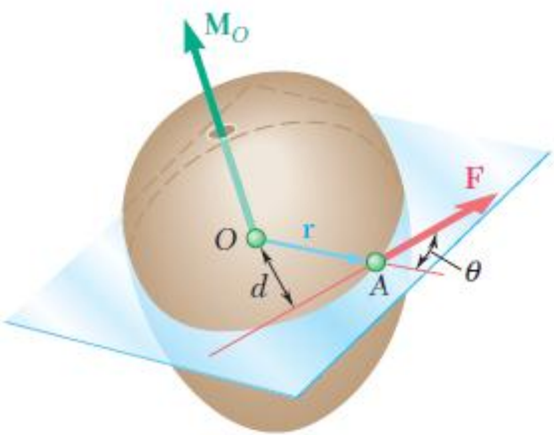
Solo me importa el sentido de giro no si la fuerza y las coordenadas son positivas o negativas.



a) $\mathbf{M}_O = +Fd$

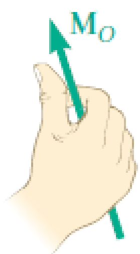


b) $\mathbf{M}_O = -Fd$

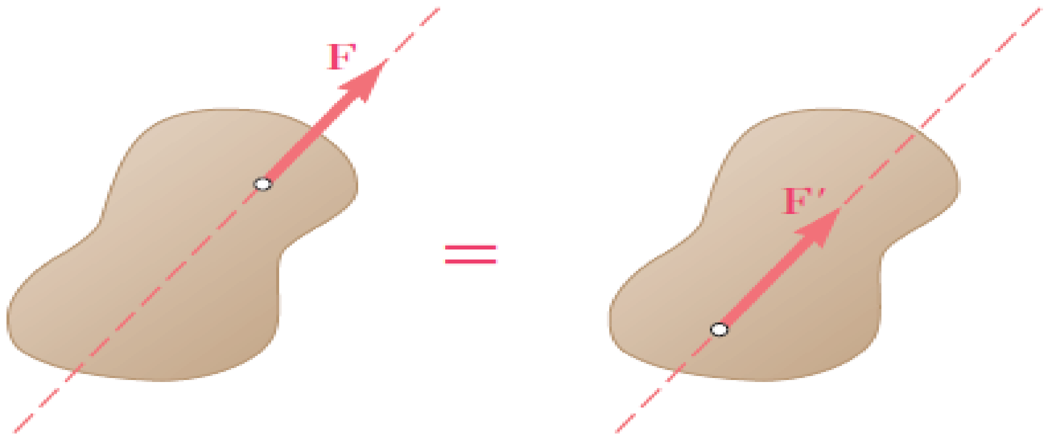


Principal condición fuerza y distancia tiene que ser perpendiculares.

- Busco la distancia perpendicular
- Llevo a la fuerza que sea perpendicular a la distancia.

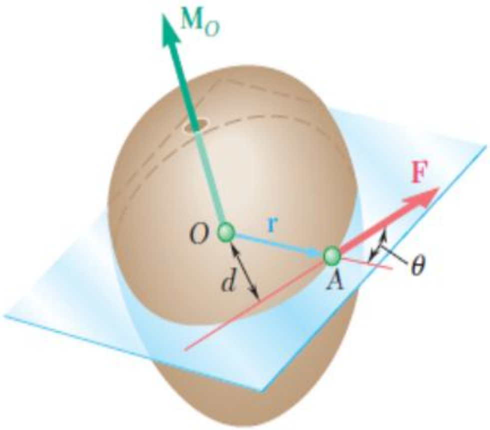


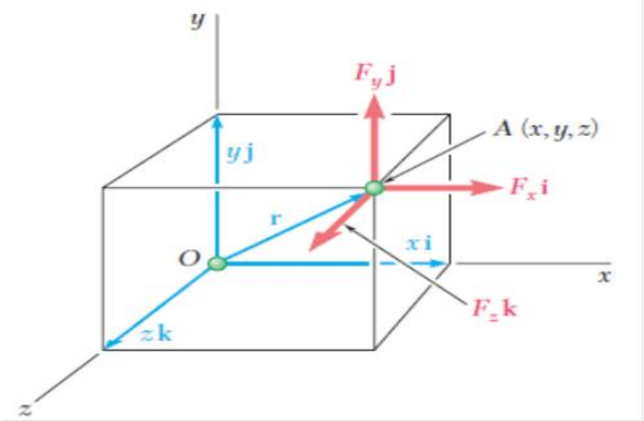
PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD



Usted puede trasladar una fuerza a cualquier punto diferente de donde esta este aplicada siempre y cuando ese otro punto este en su misma línea de acción y seguirá causando el mismo momento.

MOMENTO CON RESPECTO A UN PUNTO EN EL ESPACIO





$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

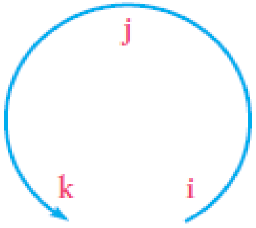


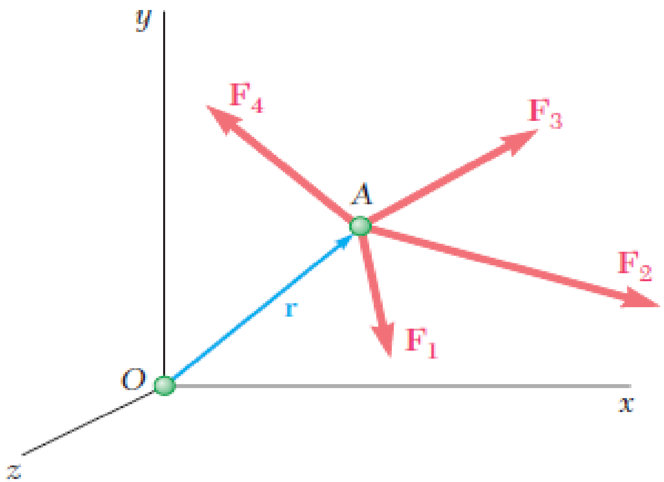
Figura 3.11

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\
\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\
\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0
\end{array}$$

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

Si me interesa la dirección de la fuerza y las coordenadas para saber si el momento es positivo negativo y si va en i,j,k.

TEOREMA DE VARIGNON



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots$$

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$$

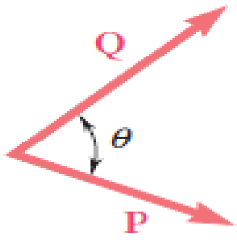
$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

Aplicable a fuerzas que son concurrentes.

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$

PRODUCTO PUNTO ENTRE 2 VECTORES



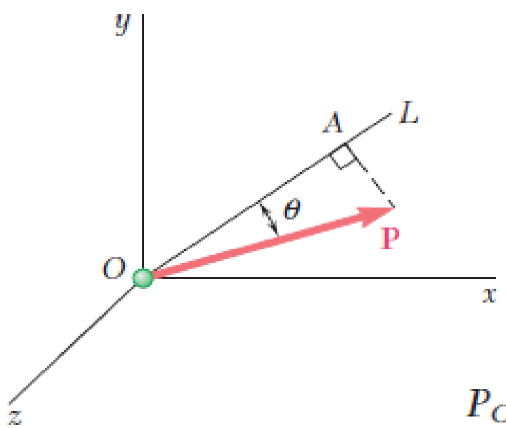
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

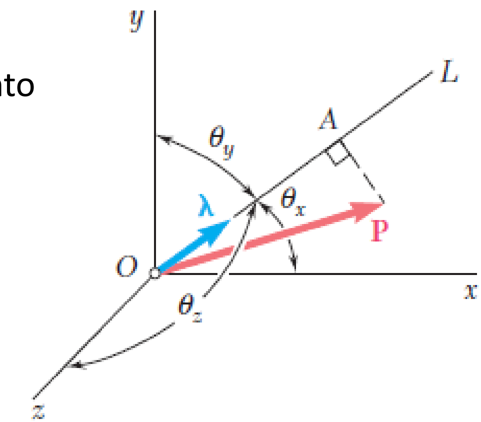
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

Aplicaciones del producto punto

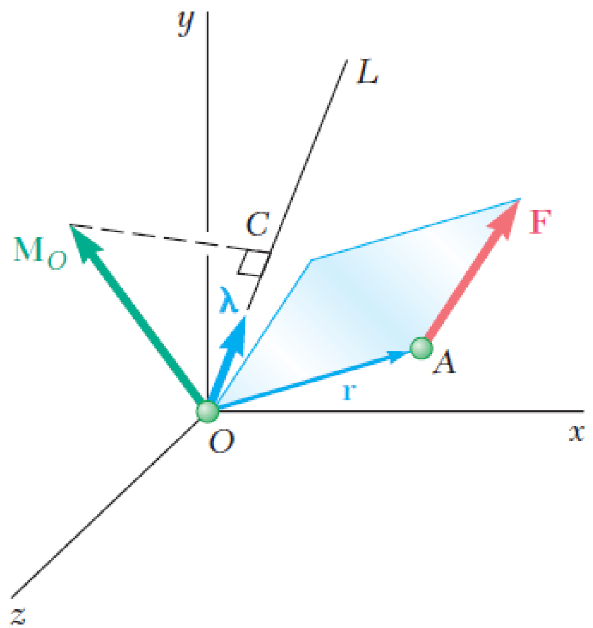


$$P_{OL} = P \cos \theta$$



$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

MOMENTO CON RESPECTO A UN EJE



Para calcular el momento con respecto a un eje tengo que calcular primero el momento con respecto a un punto que pertenezca al eje.

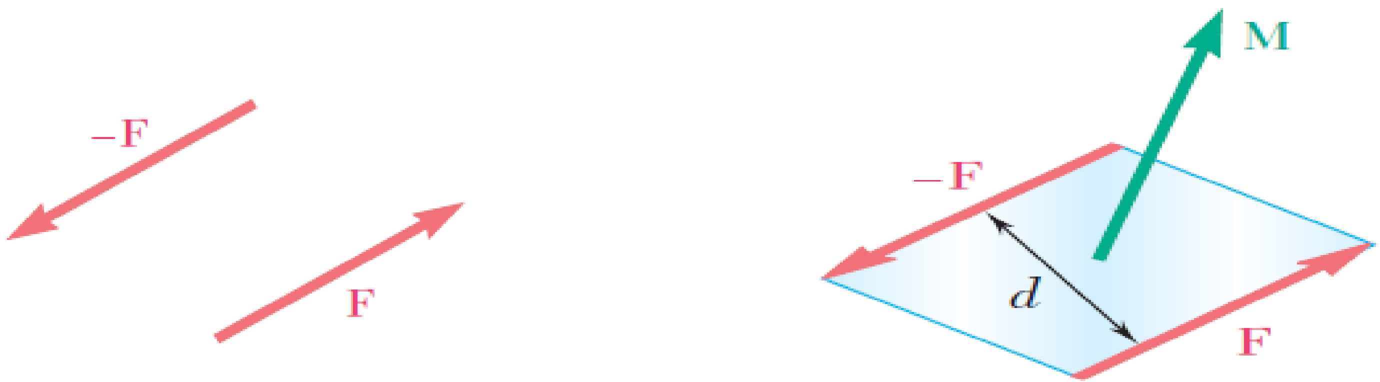
$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

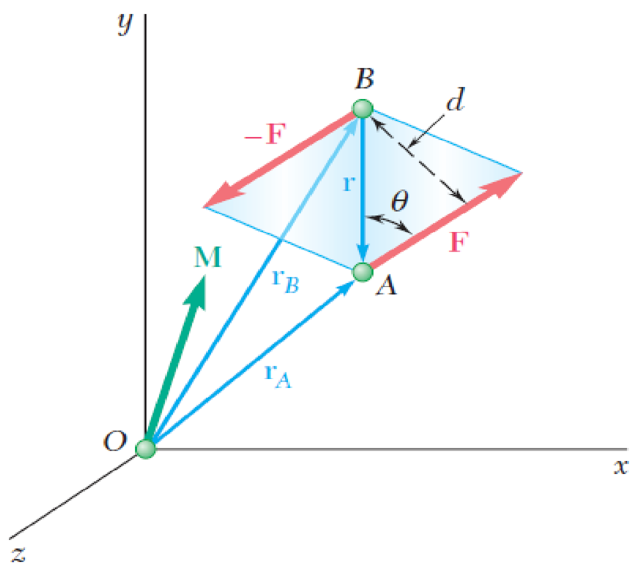
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de $\mathbf{F}$
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

PAR DE FUERZAS

Se dice que *dos fuerzas* **F** *y* −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.30).



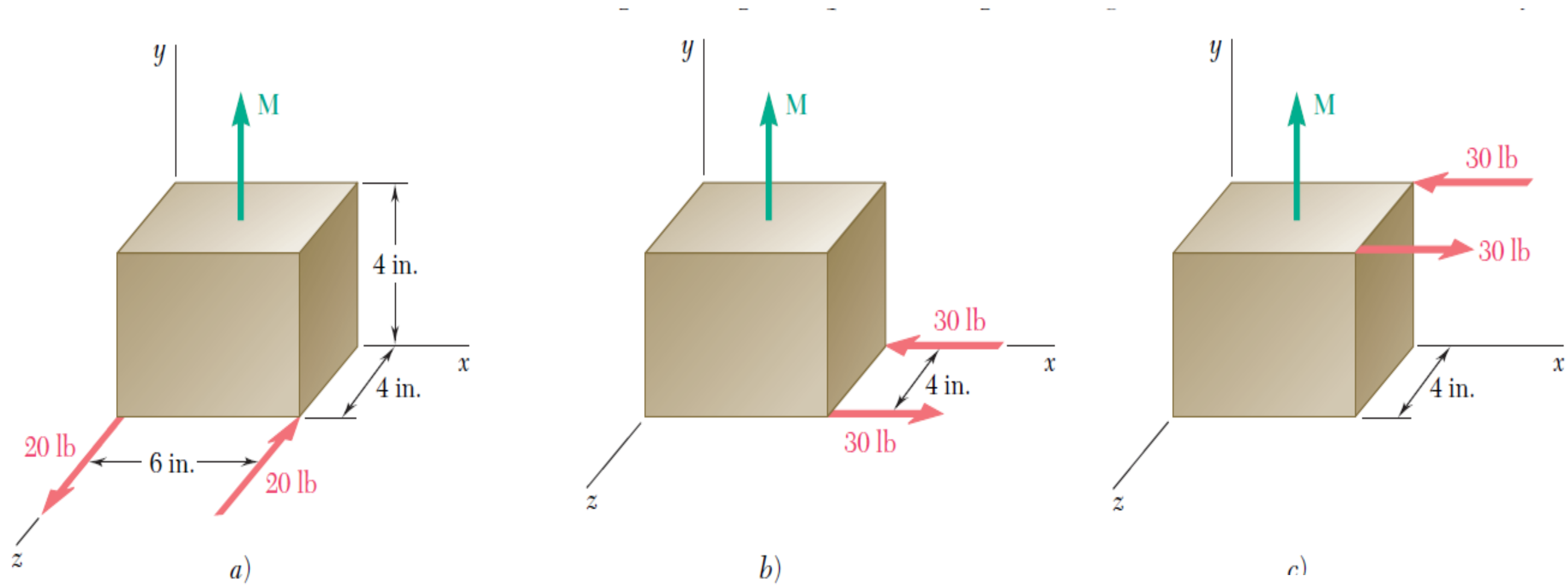


Par, momento y torque significan lo mismo

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

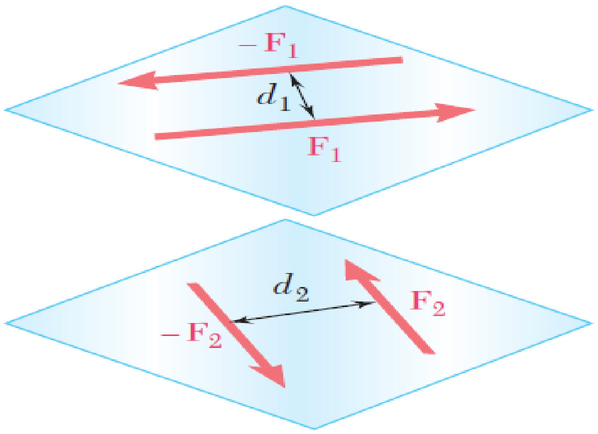
$$M = rF \operatorname{sen} \theta = Fd$$

PARES EQUIVALENTES



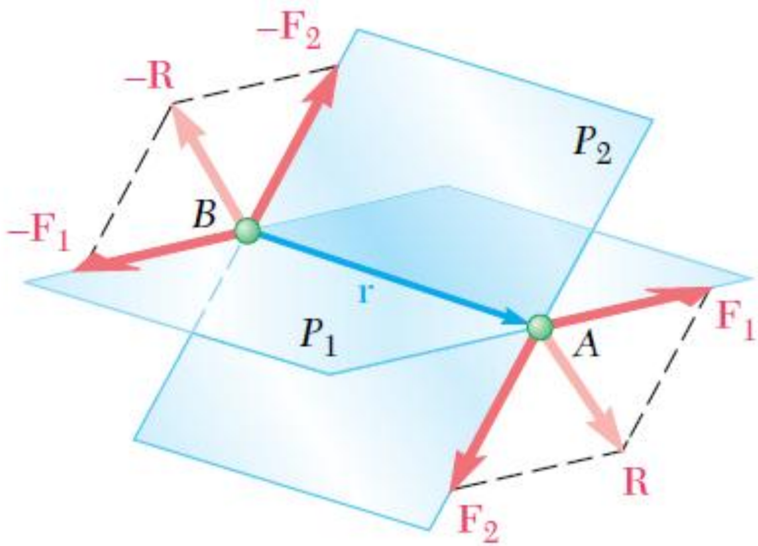
Para que un par se equivalente a otro se debe cumplir:

- Magnitud del momento resultante igual
- Sentido de giro del momento el mismo.
- Estar en planos paralelos

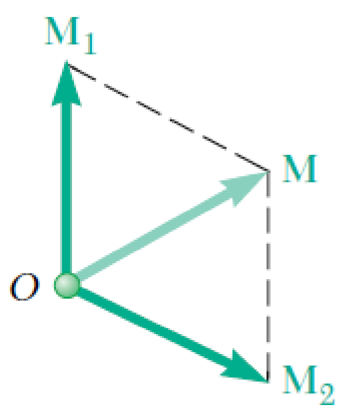


$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

SUMA DE PARES



Solamente se pueden sumar pares si sus fuerzas son concurrentes o sus líneas de acción se cruzan en algún punto.

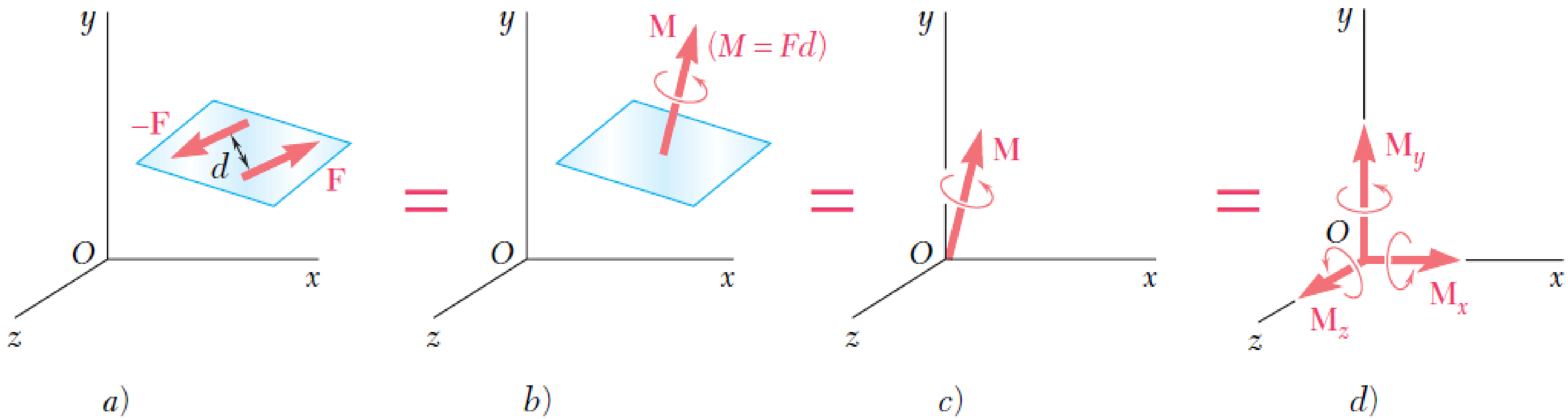


$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

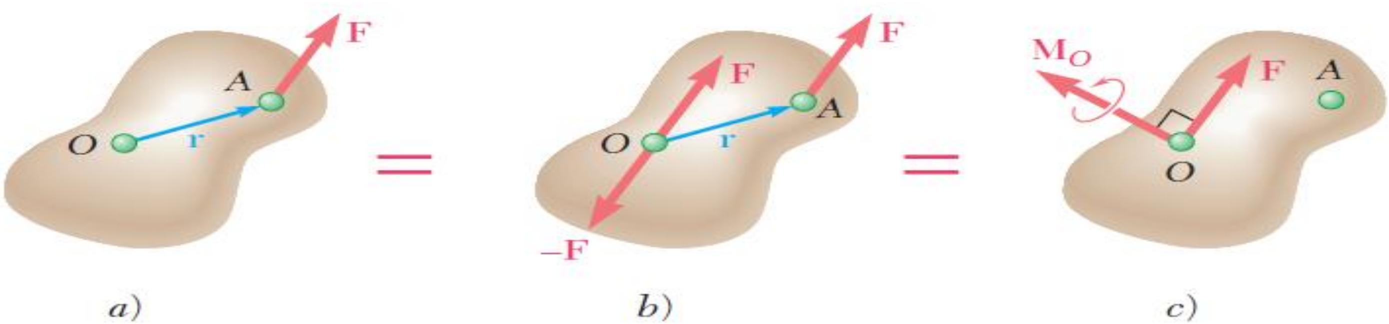
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

REPRESENTACION DE UN PAR POR UN VECTOR



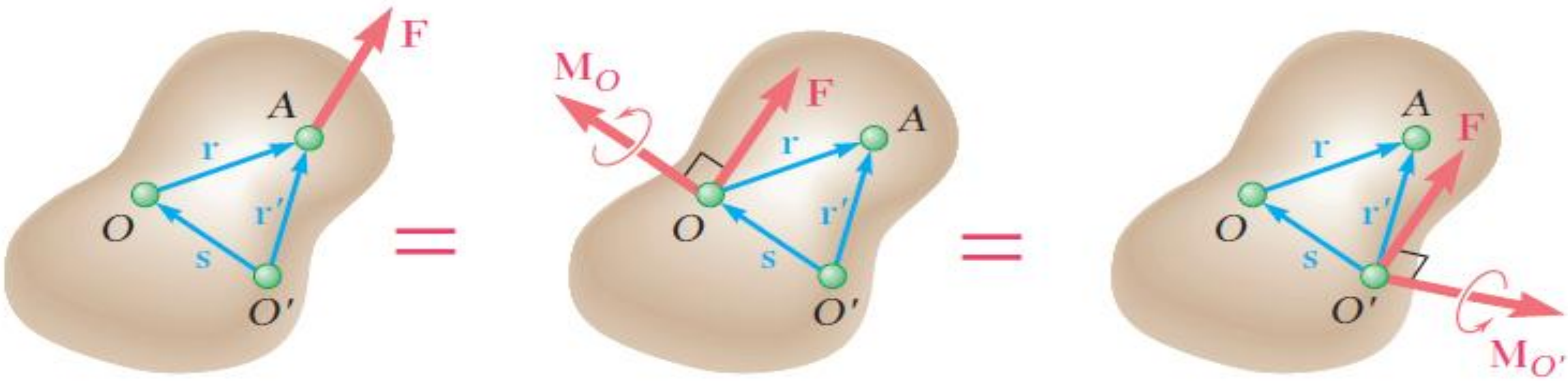
Un par puede ser sustituido por un el vector momento que ocasiona dicho par

SISTEMA DE FUERZA PAR



Es un sistema constituido por una fuerza y momento resultante de todas las fuerzas que actúan en el cuerpo.

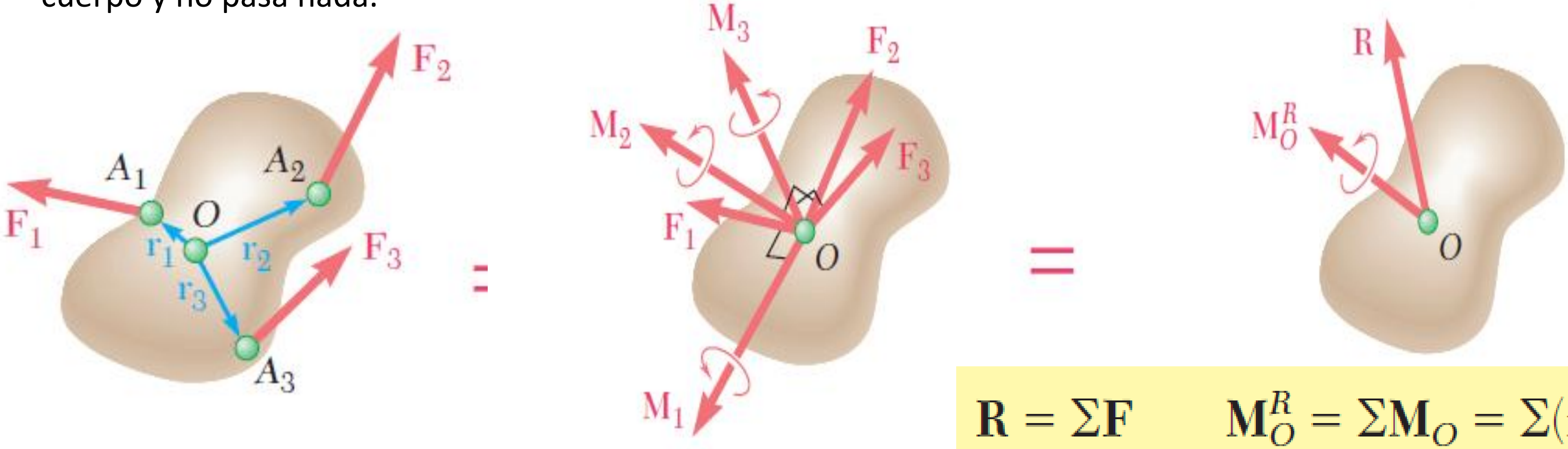
Cuando traslado una fuerza a un punto diferente de su línea de acción aparece un momento de magnitud igual a la fuerza trasladada por la distancia traslada.



a) *b*) *c*)

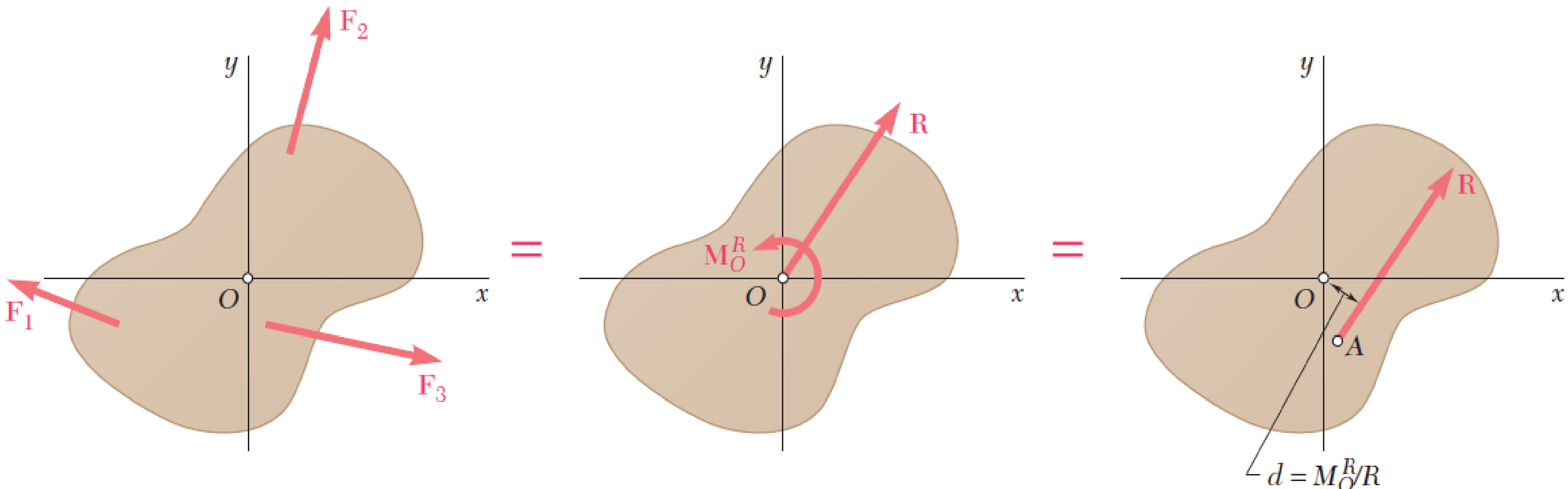
REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN SISTEMA DE FUERZA-PAR

Recordar que los momentos son vectores deslizante y por lo tanto lo puedo llevar a cualquier punto del cuerpo y no pasa nada.



$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

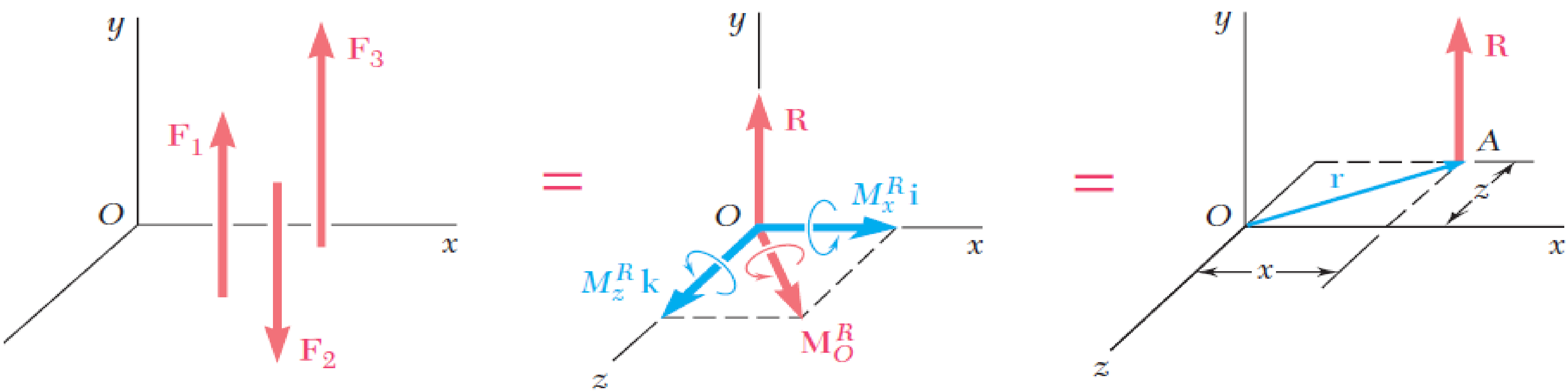
REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZA-PAR A UNA SOLA FUERZA



a) *c)*

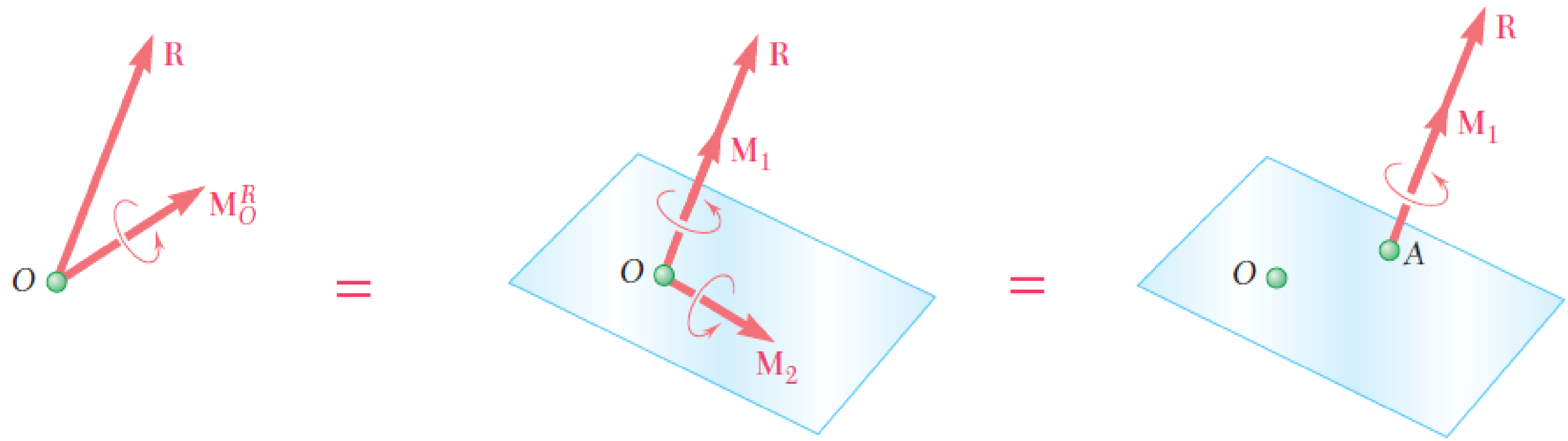
$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$



Para poder remplazar un sistema de fuerza-par por una sola fuerza el momento y la fuerza resultante tiene que ser perpendiculares o sea que el producto punto entre los dos tiene que ser 0.

REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSION



$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$$

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2}$$