Institución Universitaria

FISICA ESTATICA Y DINAMICA

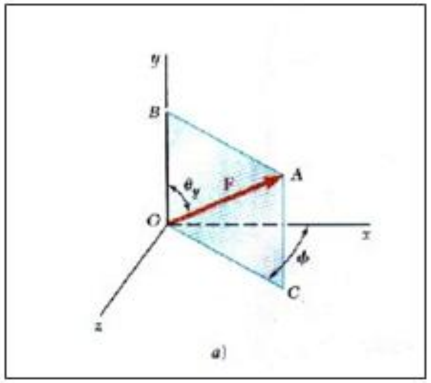
PROFESOR:
DIEGO ANTONIO MUÑOZ SANCHEZ
ING. MECANICO
ESP. GESTION ENERGETICA INDUSTRIAL

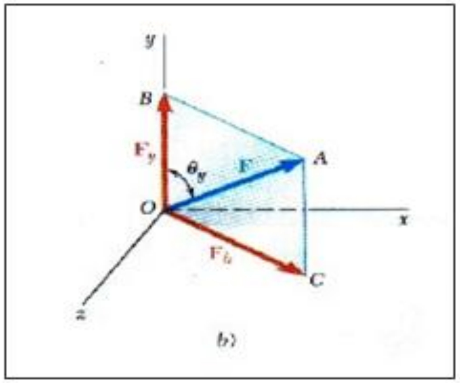
FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS
MEDELLIN
2013

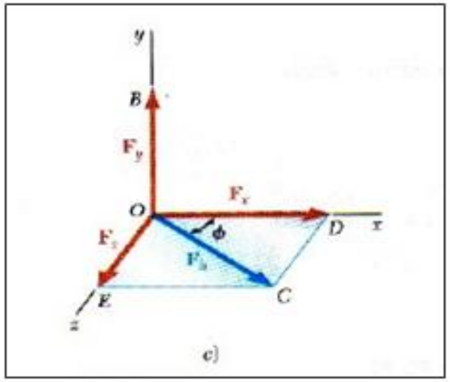
CONCEPTOS BASICOS VECTORES EN EL ESPACIO

CASO 1.

Cuando me dan la fuerza y 2 ángulos (uno con respecto a un eje y otro con respecto a un plano.







$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$F_x = F_h \cos \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \cos \phi$$
$$F_z = F_h \operatorname{sen} \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \operatorname{sen} \phi$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

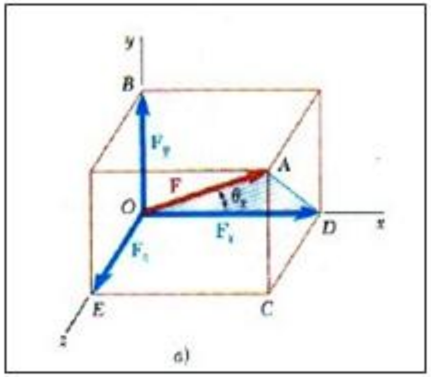
$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

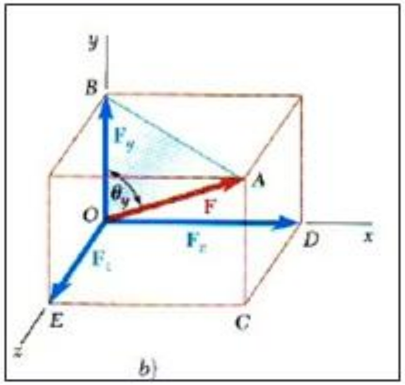
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

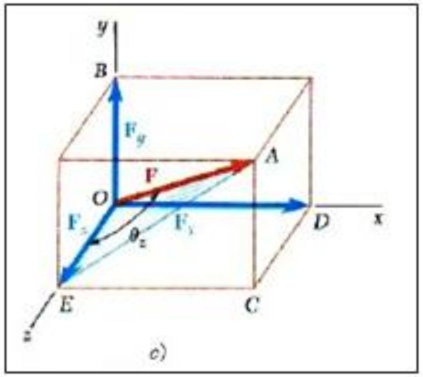
Fuente libro de Beer Johnston

CASO 2.

Cuando nos dan el ángulo que forma la fuerza con cada uno de los ejes.







$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

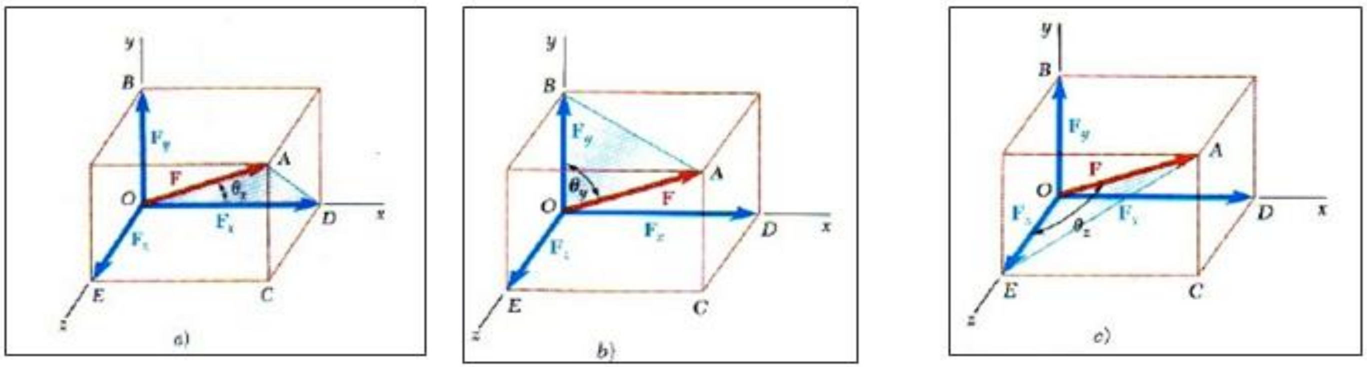
$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

Fuente libro de Beer Johnston

EJEMPLO CASO 1

Ejemplo 1. Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60°, 45° y 120° con los ejes x, y y z, respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.



Sustituyendo $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$ y $\theta_z = 120°$ en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500\ \text{N})\cos 60° = +250\ \text{N}$$
$$F_y = (500\ \text{N})\cos 45° = +354\ \text{N}$$
$$F_z = (500\ \text{N})\cos 120° = -250\ \text{N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de **F**, se tiene

$$\mathbf{F} = (250\ \text{N})\mathbf{i} + (354\ \text{N})\mathbf{j} - (250\ \text{N})\mathbf{k}$$

Fuente libro de Beer Johnston

EJEMPLO CASO 1

Ejemplo 2. Una fuerza **F** tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene†

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\
&= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\
&= \sqrt{4\,900} \text{ lb} = 70 \text{ lb}
\end{aligned}
$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de **F** en las ecuaciones (2.25), se escribe

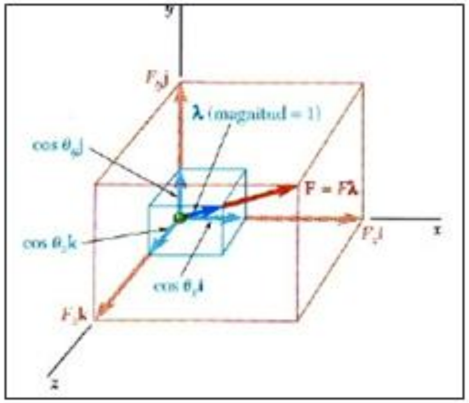
$$
\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}
$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$
\theta_x = 73.4° \qquad \theta_y = 115.4° \qquad \theta_z = 31.0°
$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora.

Fuente libro de Beer Johnston



Institución Universitaria

CASO 3.

Cuando me dan las coordenadas del punto donde nace la fuerza hasta el punto donde termina.

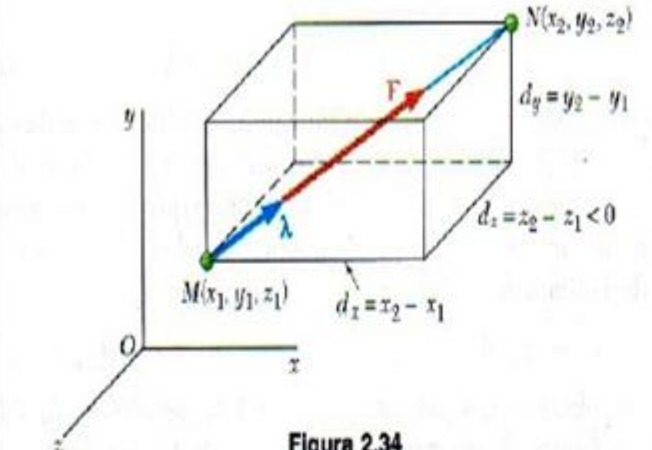


Figura 2.34

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

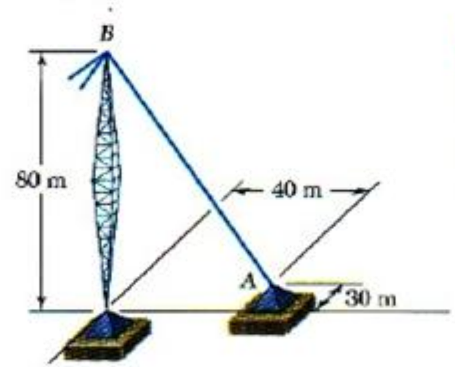
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$$

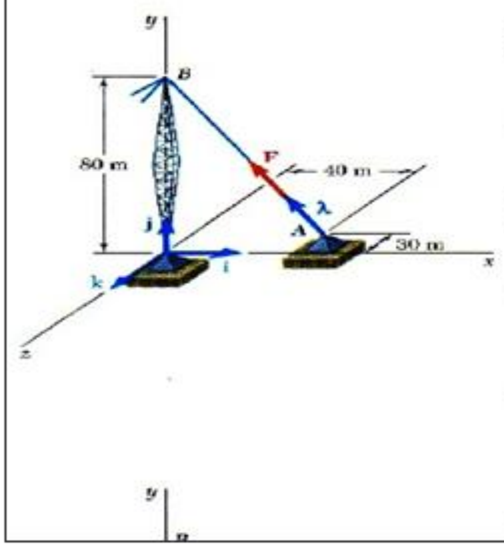
Fuente libro de Beer Johnston

EJEMPLO CASO 3



PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.



SOLUCIÓN

***a*) Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

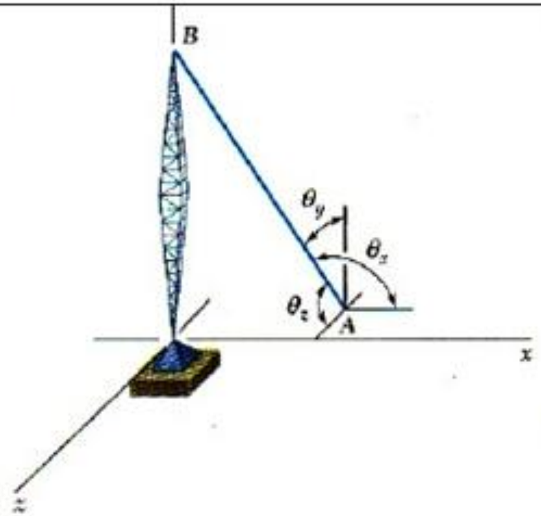
Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{F}$ son

Fuente libro de Beer Johnston



Por consiguiente, las componentes de **F** son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \qquad F_y = +2\,120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N}$$ ◀

***b)* Dirección de la fuerza.** Con las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

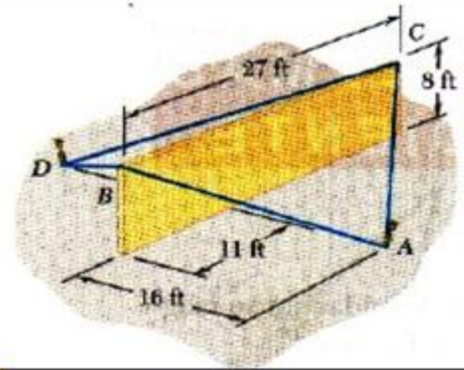
Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5°$$ ◀

(*Nota*: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza **F**.)

Fuente libro de Beer Johnston

EJEMPLO 2 . CASO 3



PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1 200 lb en el cable AC, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.

SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompondrá en sus componentes x, y y z. Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Si se representa por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AB = 21 \text{ ft}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AC = 24 \text{ ft}$$

Al representar por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene

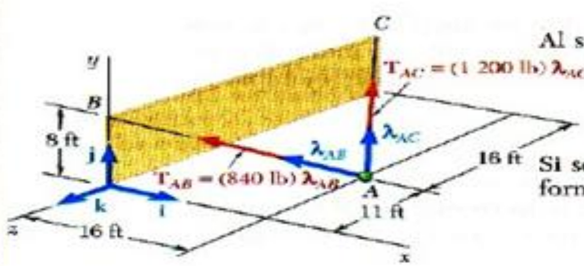
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Si se representa con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ al vector unitario a lo largo de AC, se obtiene en forma semejante

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$



Fuente libro de Beer Johnston

Resultante de las fuerzas. La resultante **R** de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\,650 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

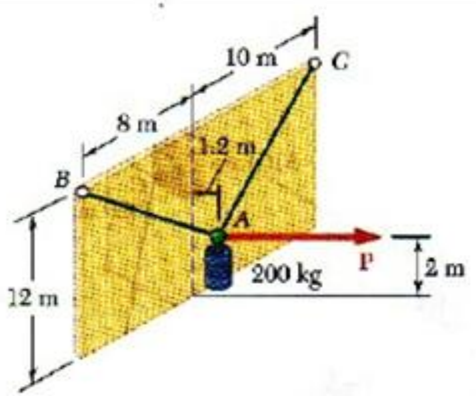
$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8^\circ \qquad \theta_y = 64.1^\circ \qquad \theta_z = 102.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

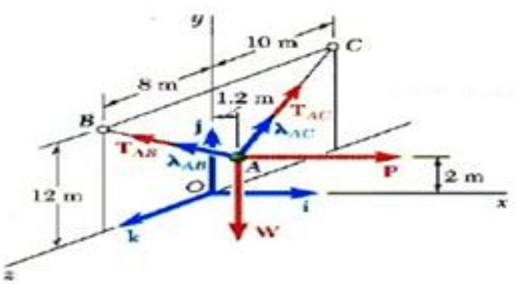
Fuente libro de Beer Johnston

EJEMPLO 3. CASO 3



PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables *AB* y *AC* que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P** y la tensión en cada cable.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto *A* como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962\text{ N})\mathbf{j} \tag{1}$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ el vector unitario a lo largo de *AB*, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} + (8\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862\text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \tag{2}$$

Al representar con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ el vector unitario a lo largo de *AC*, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (10\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193\text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193\text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \tag{3}$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes x, y y z de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$
$$\Sigma F_y = 0: \qquad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0: \qquad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

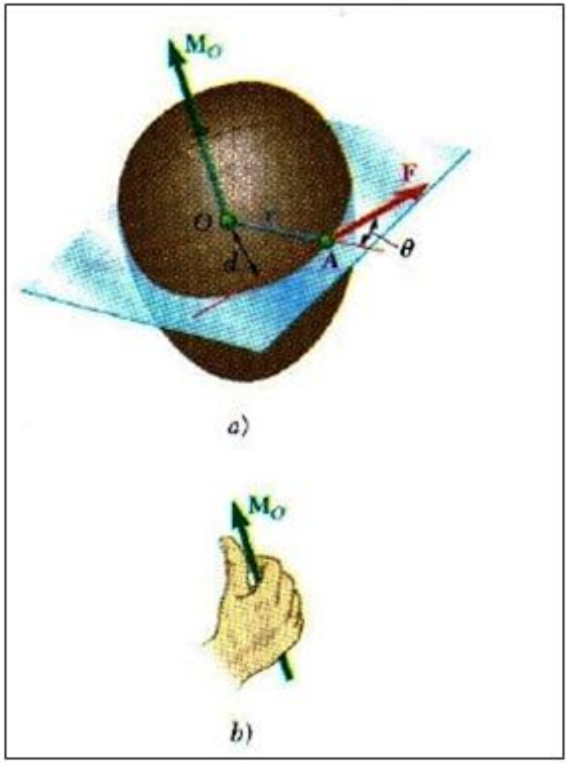
Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \qquad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \qquad T_{AC} = 1\,238 \text{ N}$$

Fuente libro de Beer Johnston

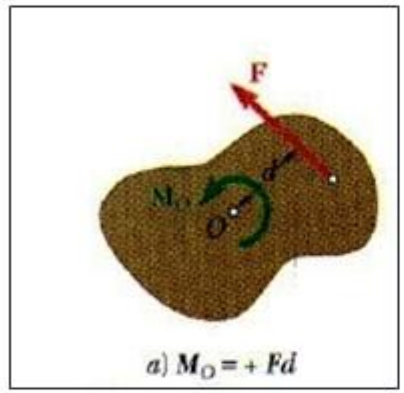
MOMENTO DE UNA FUERZA

El momento que causa una fuerza con respecto a un punto tiende a hacer rotar el cuerpo.

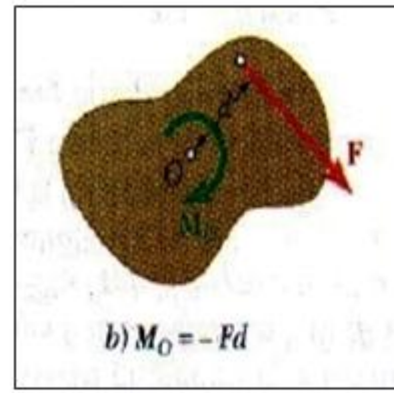


$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

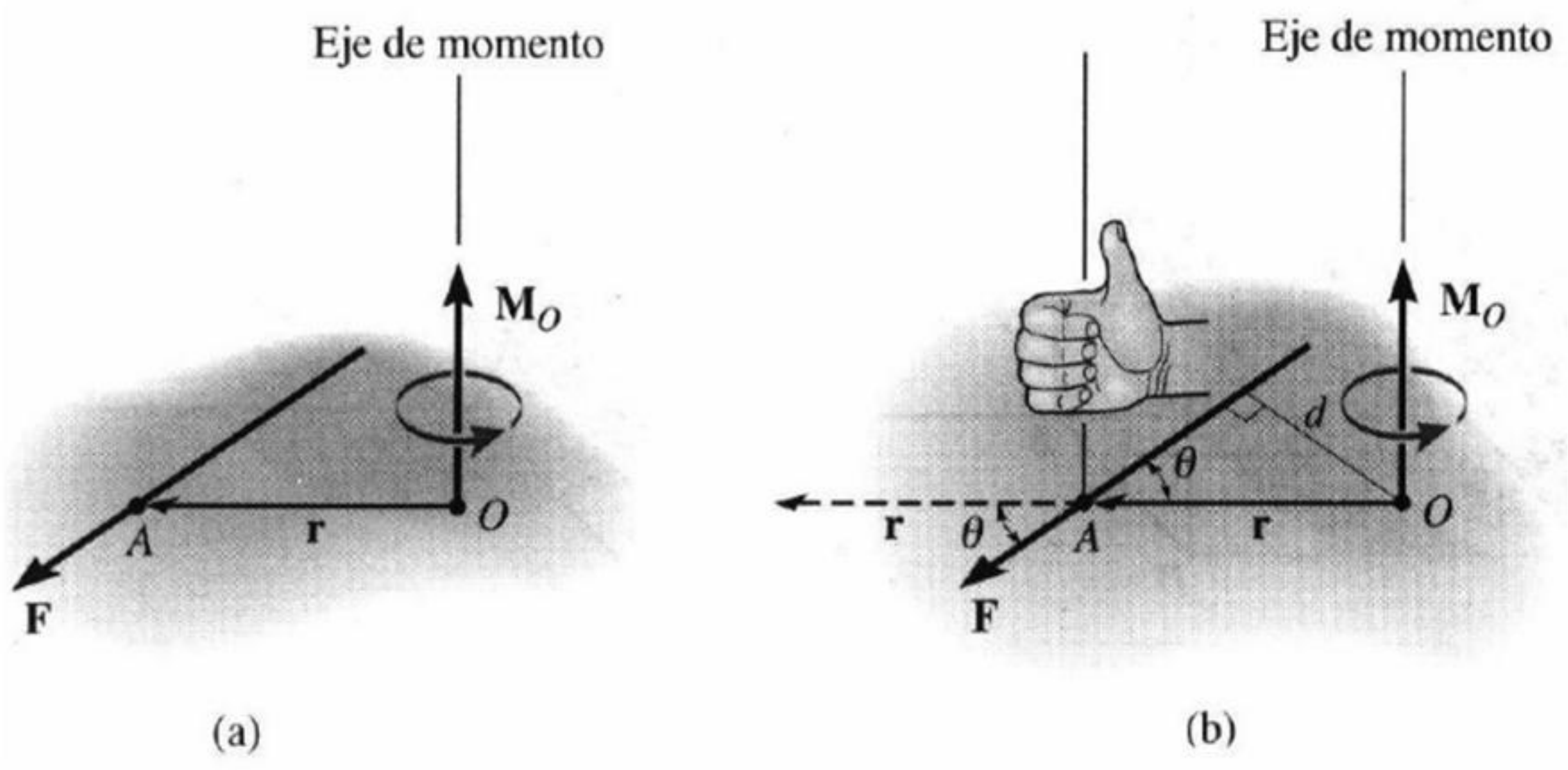


a) $M_O = +Fd$



b) $M_O = -Fd$

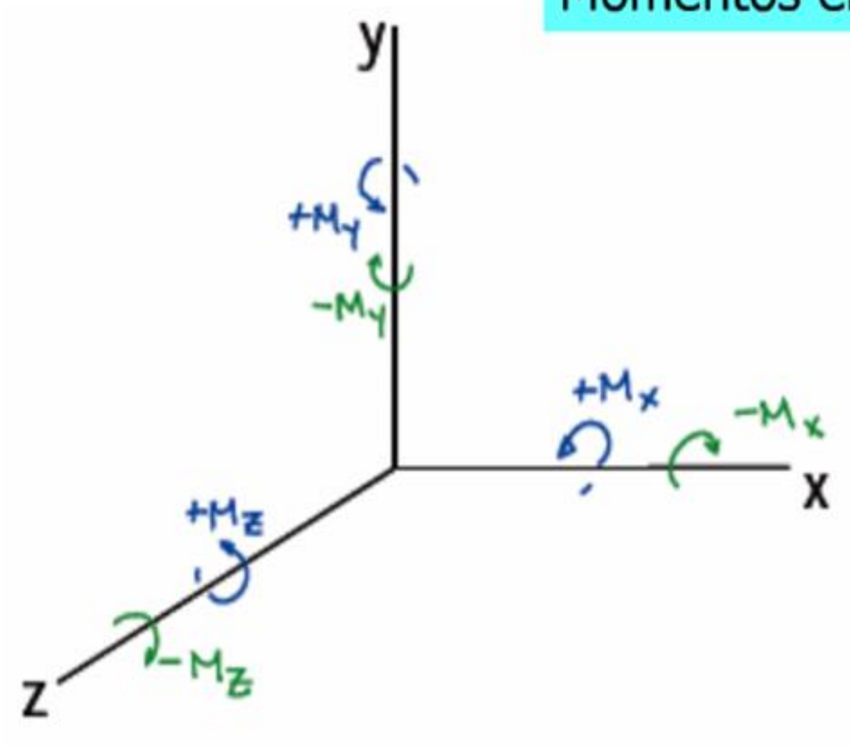
Fuente libro de Beer Johnston



www.google.com

MOMENTOS EN EL ESPACIO

Momentos en **3D**



www.google.com

El "pulgar" determina el signo (sentido)

PRODUCTO PUNTO

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

Escalar !!

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}$$ Conmutativo

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_2$$ Distributivo

$$\cancel{(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}\cdot \mathbf{S}$$ Asociativa.... No aplicable !!

En componentes rectangulares

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k})\cdot(Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$	$\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$	$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$

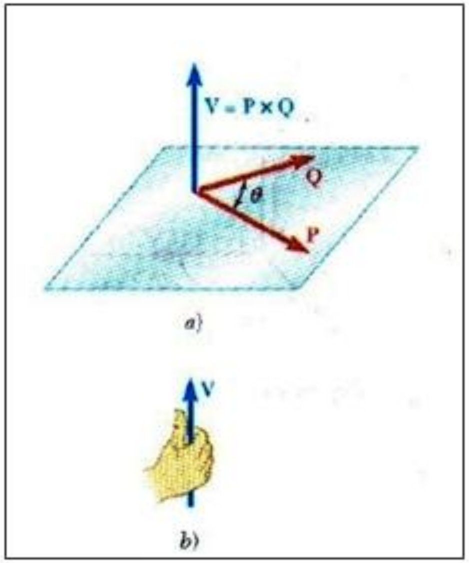
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_x$$

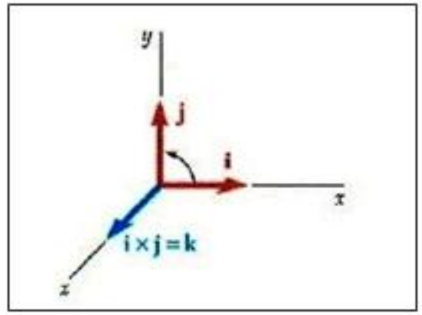
Si **P** y **Q** son iguales

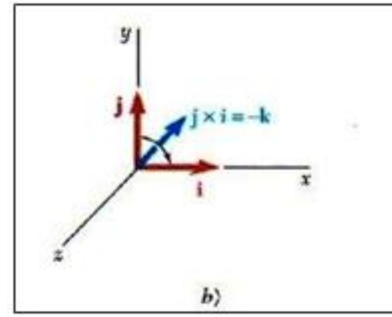
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

www.google.com

PRODUCTO CRUZ







$i \times i = 0$	$j \times i = -k$	$k \times i = j$
$i \times j = k$	$j \times j = 0$	$k \times j = -i$
$i \times k = -j$	$j \times k = i$	$k \times k = 0$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}$$

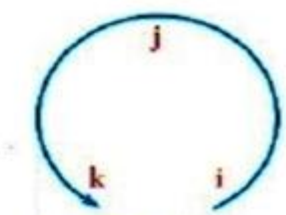


Figura 3.11

Fuente libro de Beer Johnston

PRODUCTO CRUZ POR DETERMINANTES

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

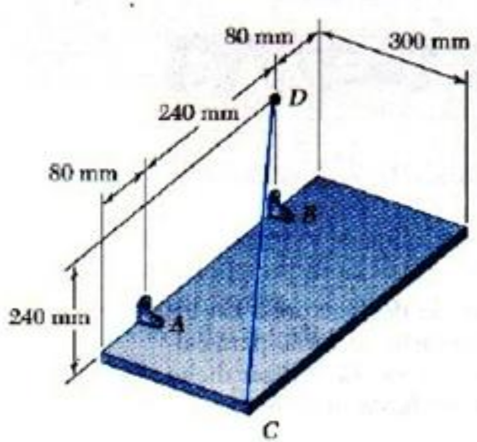
Para el elemento **i**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

Para el elemento **j**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para el elemento **k**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

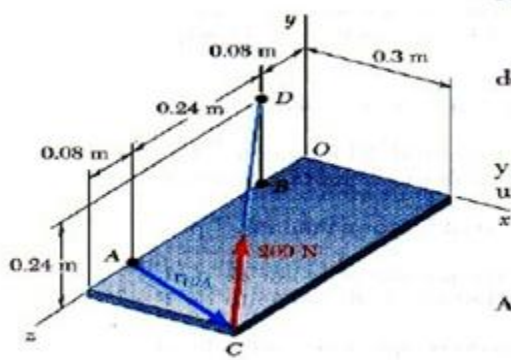
www.google.com

EJEMPLO DE MOMENTO



PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en *A* y *B* y por un alambre *CD*. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a *A* de la fuerza ejercida por el alambre en el punto *C*.



SOLUCIÓN

El momento $\mathbf{M}_A$ de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el alambre en el punto *C* con respecto a *A*, se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \qquad (1)$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde *A* hasta *C*,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.08\text{ m})\mathbf{k} \qquad (2)$$

y $\mathbf{F}$ es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de *CD*. Al introducir el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, se escribe

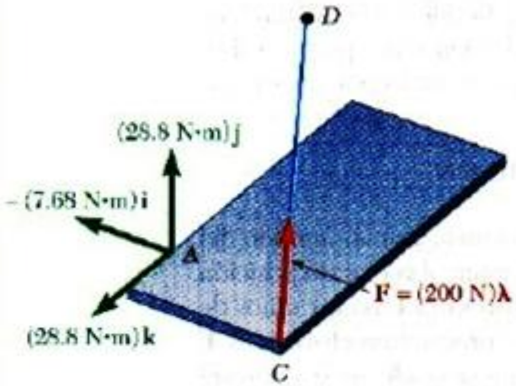
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200\text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \qquad (3)$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50\text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

Fuente libro de Beer Johnston



$$\mathbf{F} = \frac{200\ \text{N}}{0.50\ \text{m}}[-(0.3\ \text{m})\mathbf{i} + (0.24\ \text{m})\mathbf{j} - (0.32\ \text{m})\mathbf{k}]$$

$$= -(120\ \text{N})\mathbf{i} + (96\ \text{N})\mathbf{j} - (128\ \text{N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, se obtiene

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.8, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

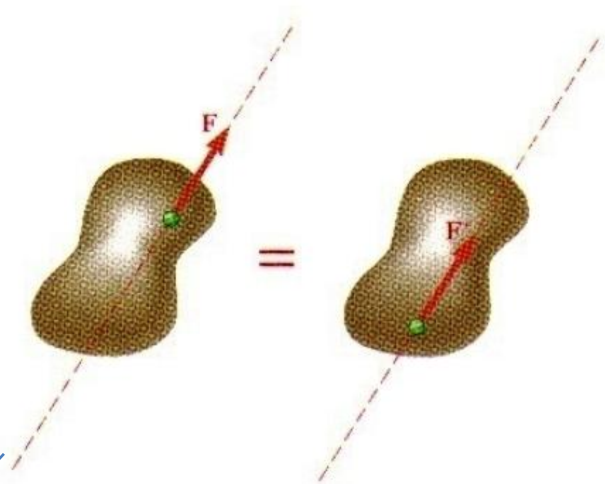
$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Fuente libro de Beer Johnston

PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecen constantes si una fuerza F que actúa en un punto dad de un cuerpo se reemplaza por una fuerza F´ que tiene la misma magnitud y dirección pero sobre la misma línea de acción.

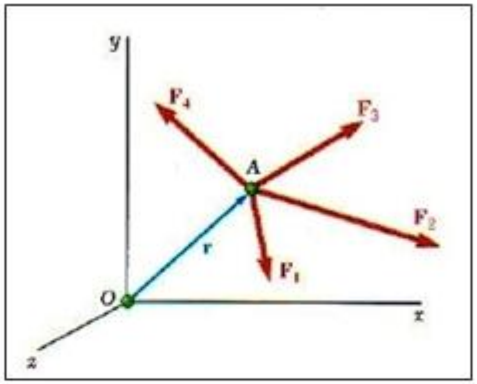


Fuente libro de Beer Johnston

Línea de acción de la fuerza

TEOREMA DE VARINONG

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots$$



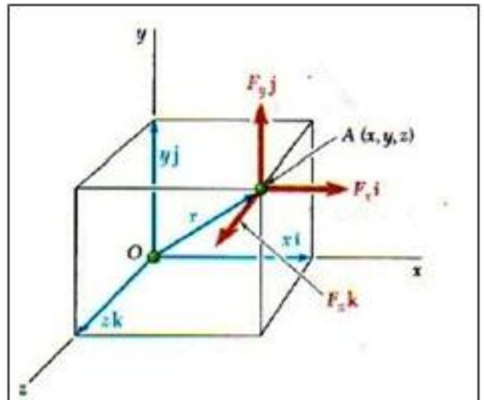
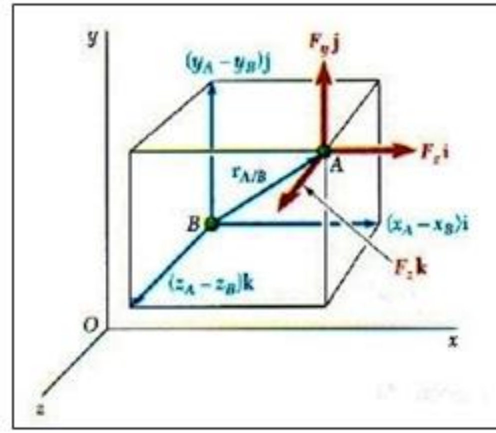


Figura 3.15



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

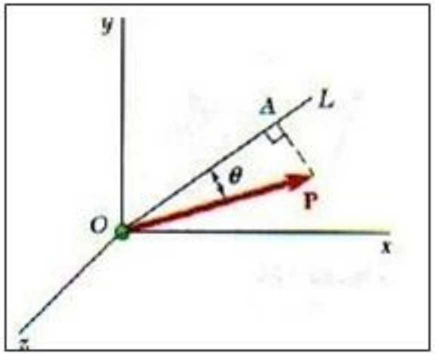
$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

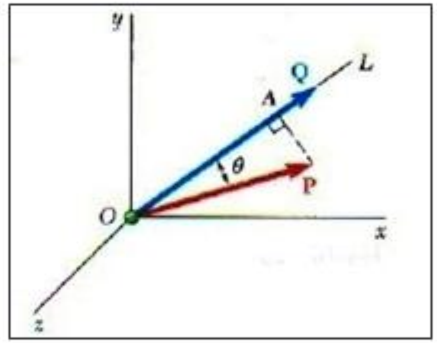
$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

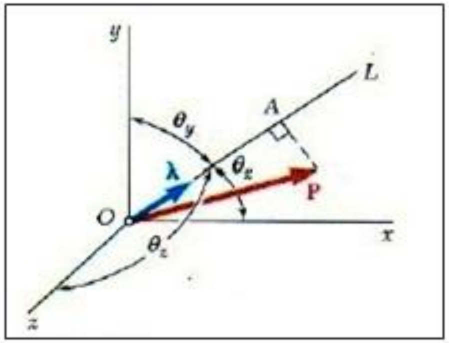
Fuente libro de Beer Johnston

Institución Universitaria

MOMENTO CON RESPECTO A UN EJE



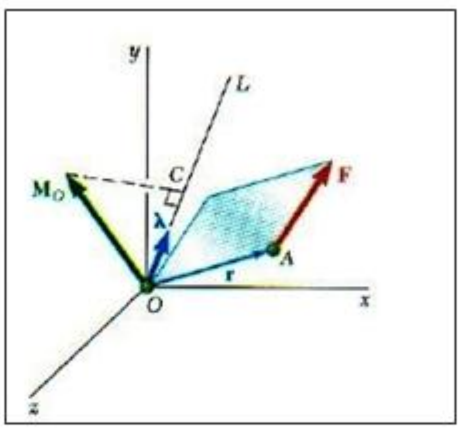




$$P_{OL} = P \cos \theta$$

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$



$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

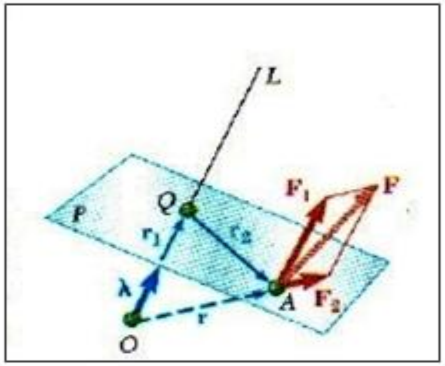
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

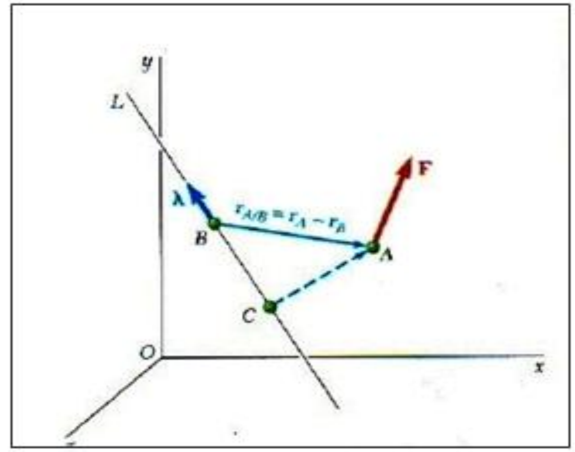
donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de $\mathbf{F}$
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$$

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Fuente libro de Beer Johnston





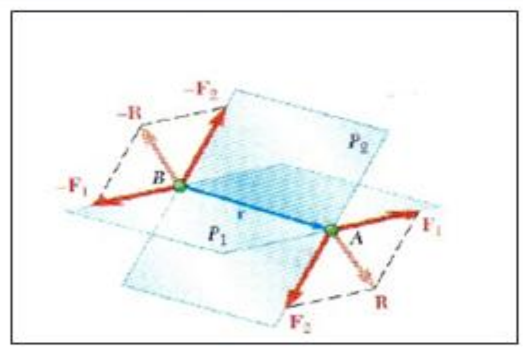
$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F})$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje BL

$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$

F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$



Fuente libro de Beer Johnston