PARA SER TRABAJADO EL 09 y 16 DE AGOSTO 2011

RAZONAMIENTO Y DEMOSATRACIÓN

- Selecciona los procedimientos a seguir en la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

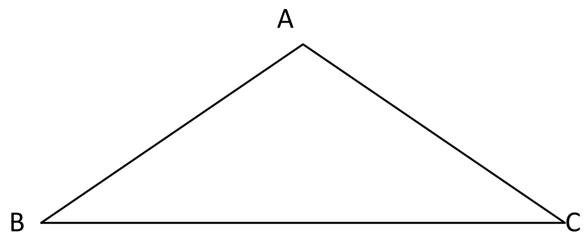
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- ✓ Resuelve problemas de triángulos oblicuángulos que involucran las leyes de senos, cosenos y tangentes.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TEOREMA 1: LA LEY DE COSENOS

Dado el triángulo $\triangle ABC$ tal que BC = a, AB = c y AC = b ,tal como lo indica la siguiente figura



Entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB$$

La ley de los Coseno es un término que permite conocer cualquier lado de un triángulo, pero para resolverlo pide ue conozcas los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado que quieres conocer. La ley de los Cosenos ayuda a resolver iertos tipos de problemas de triángulos, como los triángulos oblicuángulos, los cuales carecen de un ángulo de 90°.

La ley del Coseno dice así:

"En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el oble producto de ellos, por el coseno del ángulo que forman"

Ejemplo: Resolver el triángulo cuyos datos son:

a = 34, b = 40, c = 28.

Se aplica la ley de coseno.

TEOREMA 2: LA LEY DE SENOS

La ley o teorema de los Senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera, y que es útil para resolver ciertos tipos de problemas de triángulos**.** Especialmente los triángulos oblicuángulos, es decir, aquellos que carecen de un ángulo recto o de 90°**.**

La ley de los Senos dice así:

"En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

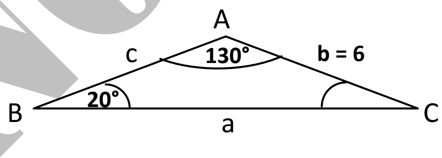
Su fórmula es la siguiente:

$$\frac{A}{sen(a)} = \frac{B}{sen(b)} = \frac{C}{sen(c)}$$

Determina las partes restantes del triángulo

si $\beta = 20°$**,** $\alpha = 130°$ **y b = 6.**

Aplica teorema de senos:

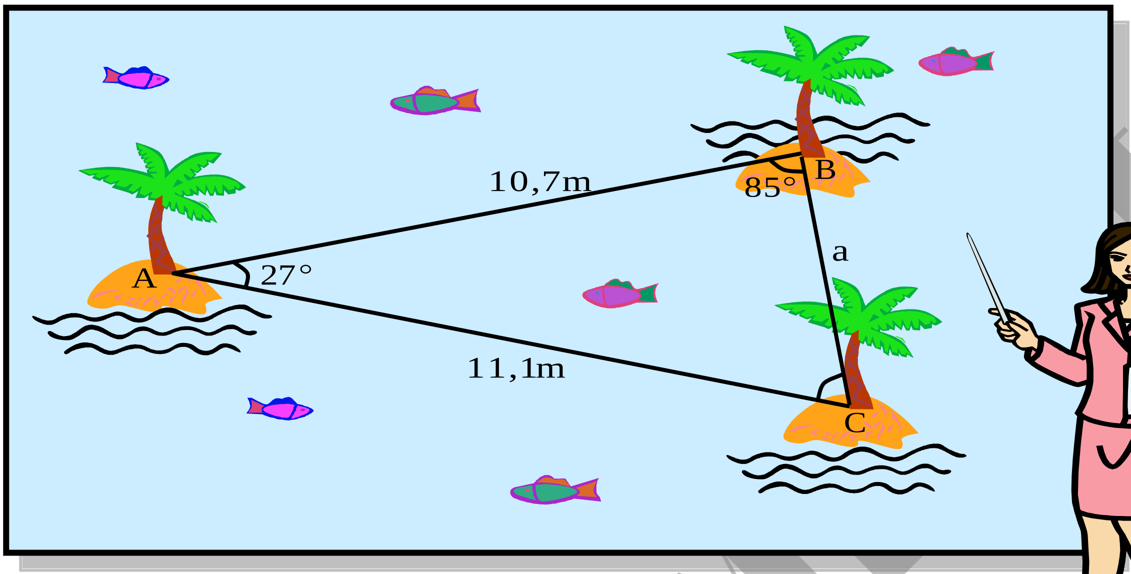


$\alpha =$ 130° a =

$\beta =$ 20° b = 6

$\gamma =$ c =

Problemas con triángulos no rectángulos



En la ilustración, con los elementos conocidos del triángulo ABC ¿puedes hallar la distancia entre las palmeras B y C?

De las leyes estudiadas (ley de senos, ley de cosenos) ¿cuál será conveniente aplicar par resolver ese problema?

¿Qué criterios has tomado en cuenta para escoger la ley a ***utilizar?***

Resuelve el problema:

CONCLUIMOS DICIENDO:

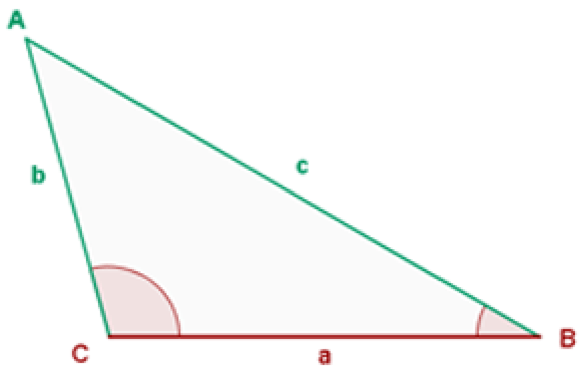
Dependiendo de los elementos que conozcamos, nos encontramos con cuatro tipos de **resolución de triángulos oblicuángulos**:

1º. Conociendo un lado y dos ángulos adyacentes a él

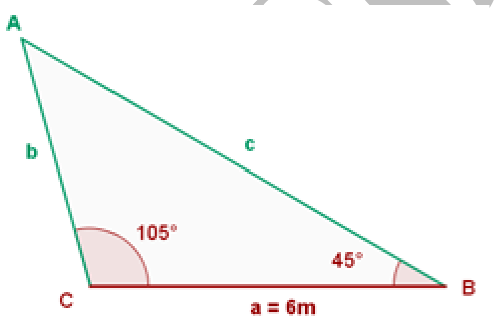
$$A = 180° - B - C$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad b = a \cdot \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad c = a \cdot \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$$



De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcula los restantes elementos.



$$A = 180° - 45° - 105° = 30°$$

$$\frac{6}{\text{sen } 30°} = \frac{b}{\text{sen } 45°} \qquad b = 6 \cdot \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 30°} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}\, m$$

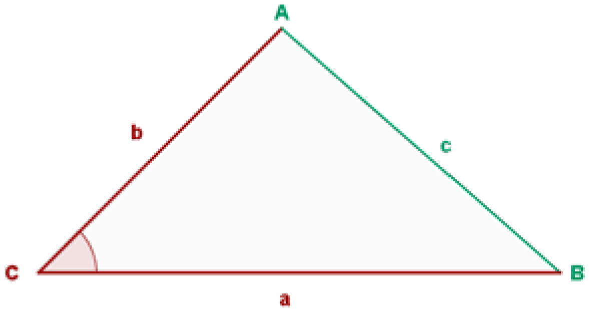
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 105^\circ} \qquad c = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 11.6m$$

2º. Conociendo dos lados y el ángulo comprendido

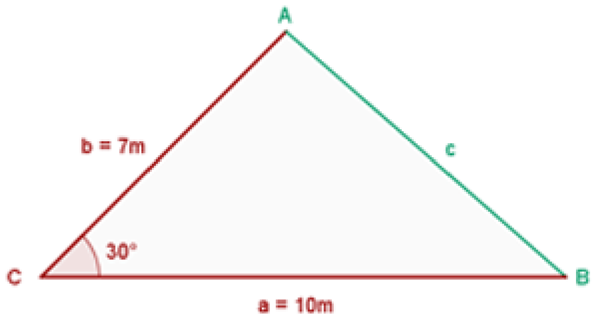
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos C}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{b}$$

$$A = 180^\circ - B - C$$



De un triángulo sabemos que: a = 10 m, b = 7 m y C = 30º. Calcula los restantes elementos.



$$c = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 30^\circ} = 5.27\,m$$

$$\frac{7}{\operatorname{sen} B} = \frac{5.27}{\operatorname{sen} 30^\circ} \qquad \operatorname{sen} B = 0.664 \Rightarrow \begin{cases} B = 41^\circ 37' 52'' \\ B = 138^\circ 22' 2'' \end{cases}$$

$B = 41^\circ 37' 52''$ porque al ser a>b el ángulo obtuso será A.

$$A = 180^\circ - 30^\circ - 41^\circ 37' 52'' = 108^\circ 22' 8''$$

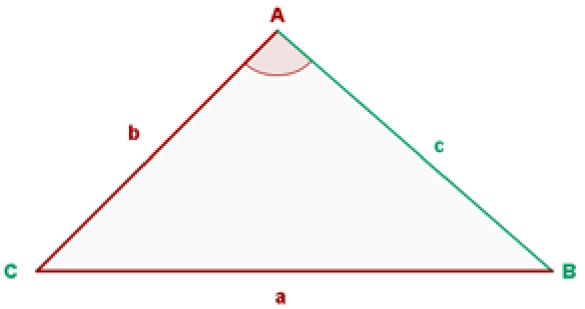
3º Conociendo dos lados y un ángulo opuesto

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \qquad Si:$$

sen B > 1. No hay solución

sen B = 1 Triángulo rectángulo

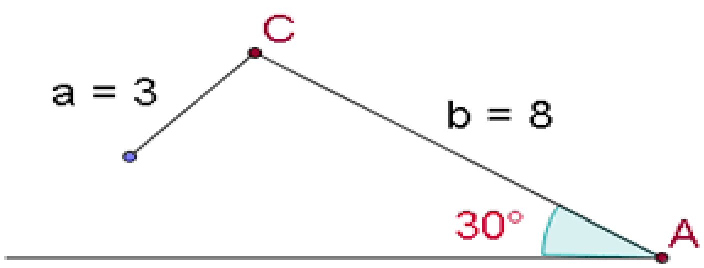
sen B < 1. Una o dos soluciones



Supongamos que tenemos a, b y A; al aplicar el teorema de los senos puede suceder:

1. sen B > 1. No hay solución.

Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 8 m.



$$\frac{3}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{8}{\text{sen } B} \qquad \text{sen } B = \frac{4}{3} > 1$$

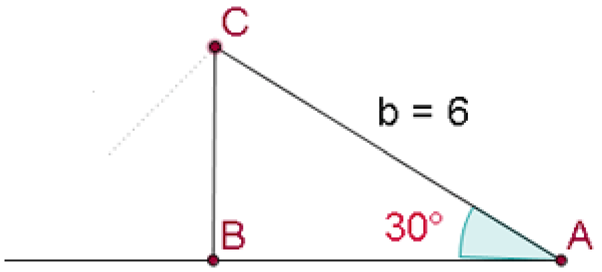
Como el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1, el problema no tiene solución. La figura muestra la imposibilidad de que exista el triángulo planteado.

2. sen B = 1. Solución única: triángulo rectángulo

Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 6 m.

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{6}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{3}{3} = 1 \qquad B = 90^\circ$$

$$C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$



$$a = 6 \cdot sen30^\circ = 3m$$

$$c = 6 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}m$$

3. sen B < 1. Una o dos soluciones

Resuelve el triángulo de datos: A = 60°, a = 8 m y b = 4 m.

$$\frac{8}{sen\,60^\circ} = \frac{4}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B = 25^\circ 40' \\ \quad B = 180^\circ - 25^\circ 40' = 154^\circ 20' \end{cases}$$

Como a >b sólo es válida la solución: $B = 25^\circ 40'$

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 25^\circ 40') = 94^\circ 20'$$

$$\frac{8}{sen\,60^\circ} = \frac{c}{sen\,94^\circ 20'} \quad c = 9.21m$$

Resuelve el triángulo de datos: A = 30°, a = 3 m y b = 4 m.

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{4}{sen\,B} \qquad sen\,B = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = 41^\circ 48' \\ B_2 = 180^\circ - 41^\circ 48' = 138^\circ 12' \end{cases}$$

Como a < b sólo son válidas las dos soluciones

$$C_1 = 180^\circ - (30^\circ + 41^\circ 48') = 108^\circ 12'$$

$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{c}{sen\,108^\circ 12'} \qquad c = 5.7m$$

$$C_2 = 180^\circ - (30^\circ + 138^\circ 12') = 11^\circ 48'$$

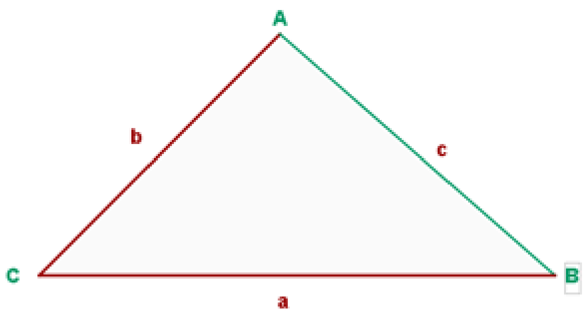
$$\frac{3}{sen\,30^\circ} = \frac{c}{sen\,11^\circ 48'} \qquad c = 1.227m$$

4º. Conociendo los tres lados

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$C = 180^\circ - A - B$$



Resuelve el triángulo de datos: a = 15 m, b = 22 m y c = 17 m.

$$\cos A = \frac{484+289-225}{748} = 0.7326 \qquad A = 42°54'$$

$$\cos B = \frac{289+225-484}{510} = 0.588 \qquad B = 86°38'$$

$$180° - 42°54' - 86°38' = 50°28' \qquad C = 50°28'$$

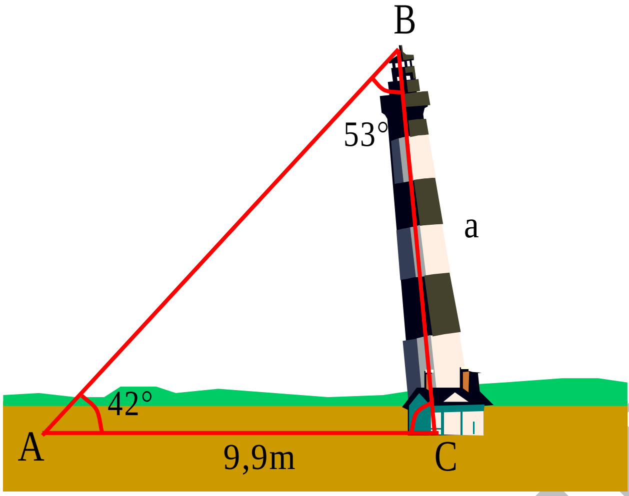
APLICO LO QUE APRENDÍ

Resolver el triángulo con las otras partes dadas y construir dicho triángulo. Las respuestas están redondeadas, tanto los decimales de los lados como los minutos y grados de los ángulos.

1. $A = 48^{\circ}$, $C = 57^{\circ}$ y b=47.
2. $A = 41^{\circ}$, $C = 77^{\circ}$ y a=10,5.
3. $B = 20^{\circ}$, $C = 31^{\circ}$ y b=210.
4. $B = 51^{\circ}$, $C = 71^{\circ}$ y c=537
5. $C = 28^{\circ}$, $b = 52$ y a=32
6. $A = 7^{\circ}$, $B = 12^{\circ}$ y a=2.19.
7. $A = 65^{\circ}$, a=21.3 y b=18.9.
8. $B = 30^{\circ}$, c=35.8 y b=17.9.
9. $B = 53^{\circ}$, a=140 y c=115.
10. $A = 28^{\circ}$, c=52y b = 28
11. $C = 113^{\circ}$, b=248 y a =195.
12. $C = 81^{\circ}$, c=11 y b=12.
13. $A = 60^{\circ}$, $C = 45^{\circ}$ y a=40.
14. $A = 30^{\circ}$, $B = 83^{\circ}$ y c=125.
15. $A = 72^{\circ}$, $B = 52^{\circ}$ y c=127.
16. $B = 11^{\circ}$, $C = 76^{\circ}$ y b=61.
17. $B = 67^{\circ}$, a=100 y c=125.
18. $A = 36^{\circ}$, $B = 41^{\circ}$ y c=12.4.
19. $A = 27^{\circ}$, $C = 74^{\circ}$ y a=1600.
20. $A = 40^{\circ}$, $B = 100^{\circ}$ y b=63.7.
21. $B = 62^{\circ}$, $C = 43^{\circ}$ y a=24.18.
22. $B = 28^{\circ}$, a=14 y c=17
23. $B = 34^{\circ}$, b=12.25 y c=18.08.
24. $A = 47^{\circ}$, a=206 y b=708.
25. $C = 20^{\circ}$, a=15 y b=25.
26. $C = 107^{\circ}$, b=407 y c=568.
27. $A = 54^{\circ}$, b=240 y c=389.
28. $A = 6^{\circ}$, a=54.9 y c=727.
29. $A = 47^{\circ}$, a=606 y b=708.
30. $B = 37^{\circ}$, a=12 y c=8

PROBLEMAS

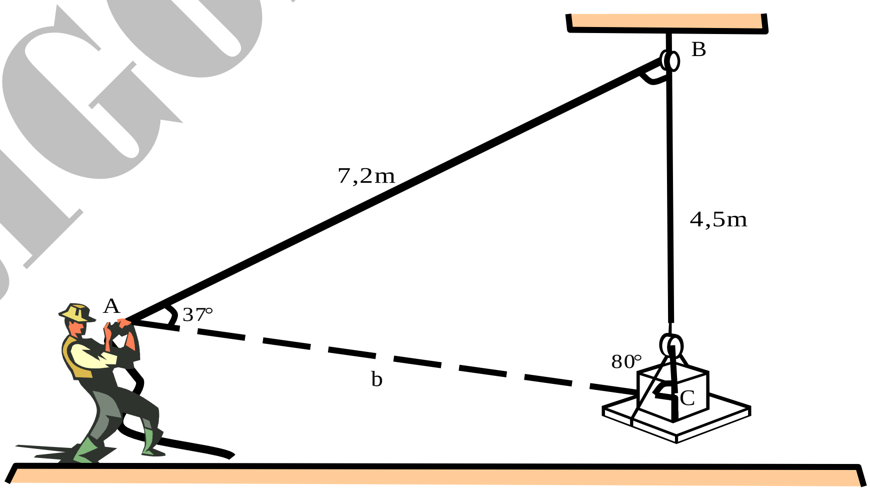
1. halla la longitud del faro inclinado si se sabe que en el triángulo ABC que se observa el lado "b" mide 9,9 m, los ángulos A, B miden 42° y 53° respectivamente.



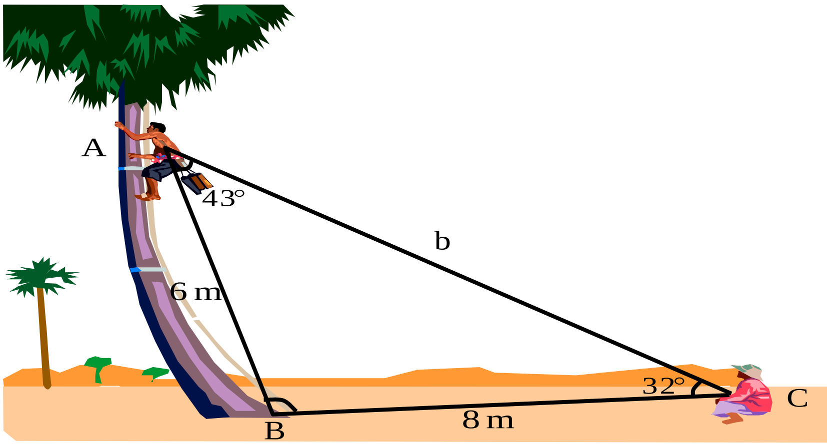
2. Dos piedras se encuentran a la orilla de una playa a una distancia uno de otro de 1.8 Km. en los puntos A y B, y se encuentra una bolla situada en un punto C. Si la piedra A mide un ángulo CAB igual a 79.3° y el que está en B mide un ángulo CBA igual a 43.6°, ¿a qué distancia está la bolla de la costa?

3. En el gráfico halla la distancia que existe entre el paquete y el obrero en el instante que en el triángulo ABC se cumpla que

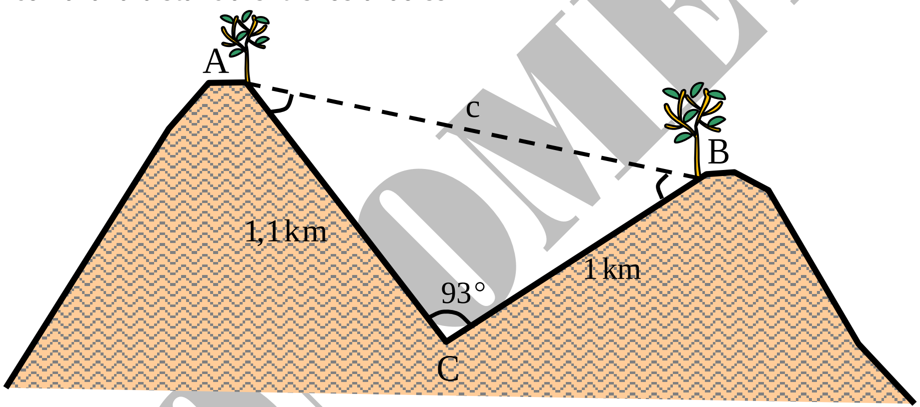
   A = 37°, B = 80°, a = 4,5 m y c = 7,2 m.



4. En el gráfico halla la distancia que existe entre las personas.



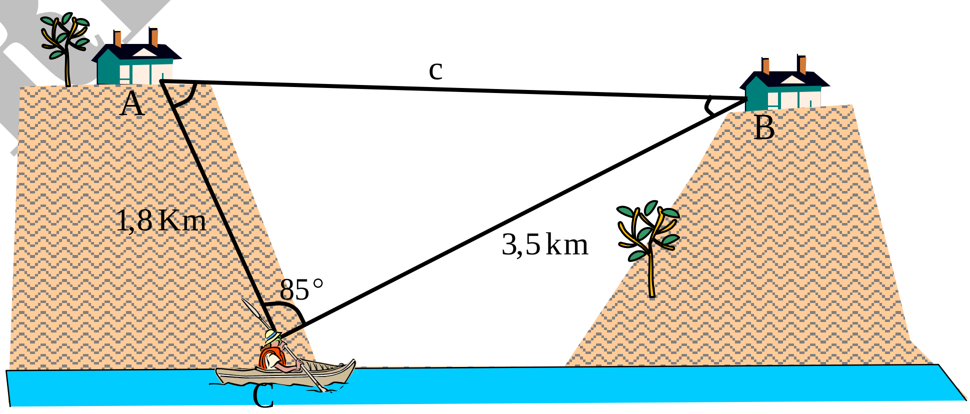
5. En el gráfico halla la distancia entre los árboles.



6. En el gráfico:

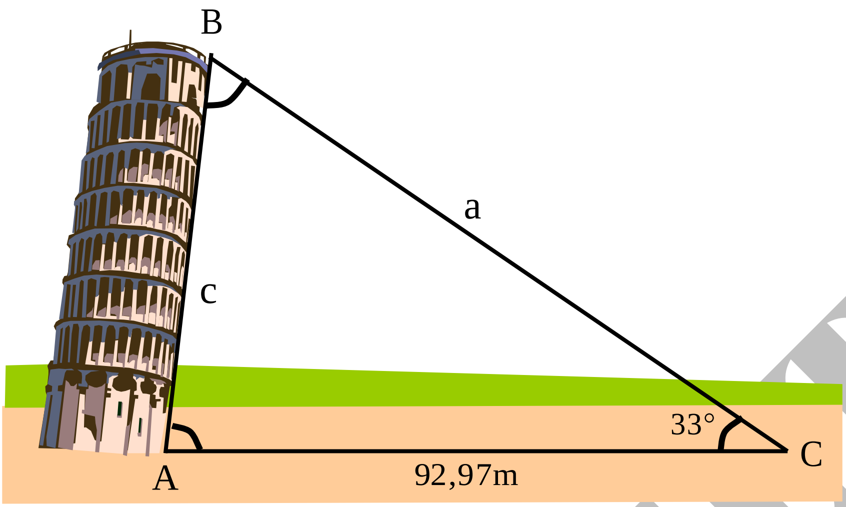
En el instante en que una persona en un bote pasaba por el río se formó el triángulo ABC.

- Calcula el valor de los ángulos A y B si se sabe que b = 1,8 km; a = 3,5 km, C = 85°.
- Halla la distancia que existe entre las casas.



7. En el gráfico se aprecia la torre inclinada de Pisa, considerada un símbolo de Italia. Calcula la altura de la torre si se sabe que la torre tiene una inclinación de 10°.

__Sugerencia:__ como tiene una inclinación de 10°, el ángulo A medirá 80°. Ahora puedes calcular el ángulo B.



8. En el gráfico calcula:
- Los ángulos que forman las cuerdas con el techo.
- La distancia que existe entre los puntos A y B