CAPÍTULO

5 Resolución de Triángulos Rectángulos

En la antigüedad la arquitectura (pirámides, templos para los dioses,...) exigió un alto grado de precisión. Para medir alturas se basaban en la longitud de la sombra y el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. En este procedimiento se utilizó una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, que es lo que conocemos hoy como la ***relación pitagórica****.*

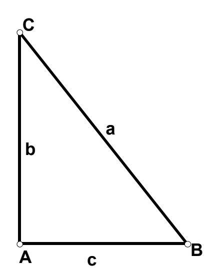
5.1 Triángulos rectángulos

Como ya se ha definido, un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos.**

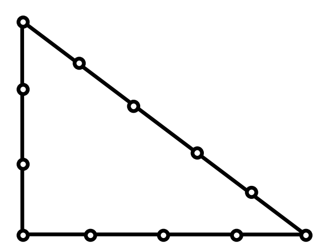
a : hipotenusa del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BAC}$

b : cateto

c : cateto



El triángulo de lados 3, 4 y 5 unidades, llamado perfecto o sagrado, fue usado por los egipcios para trazar ángulos rectos. En sus papiros se observa que después de las inundaciones del Nilo y construyendo triángulos rectángulos con cuerdas, fijando los límites de las parcelas, trazaban direcciones perpendiculares.

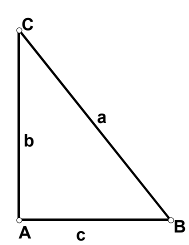


5.2.3 Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A esta relación se le llama relación pitagórica.



5.2.3 El recíproco del teorema de Pitágoras

Si en un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo y el ángulo recto es el ángulo cuyo vértice es A.

Nota: Si tres números, *a, b* y *c* verifican una de las tres relaciones pitagóricas entonces, podemos construir un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como longitudes *a, b* y *c.*

Queda para el lector verificar que las ternas de números utilizadas por los egipcios y los hindúes cumplen con la relación pitagórica.

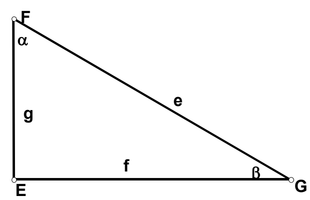
5.2.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Ejemplo 1: Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 *cm* y 5 *cm*. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Solución
Si llamamos: a a la hipotenusa; b y c a los catetos, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos $a^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{169} = 13$
por lo que obtenemos que la hipotenusa mide 13 *cm*

Ejemplo 2: Dado el triángulo de la figura, con los siguientes datos: $e = 9cm$, $g = 4.5cm$ y $\beta = 30^{\circ}$. Calcular : f y α

Solución



Al aplicar el teorema de Pitágoras, tenemos:

$e^2 = f^2 + g^2$
al reemplazar por los datos, tenemos:
$e^2 = f^2 + 4.5^2 \Rightarrow f^2 = g^2 - 4.5^2 = 60.75$
$\Rightarrow f = \sqrt{60.75} \cong 7.8$

Por lo tanto: $f \cong 7.8\,cm$

Para calcular el ángulo α , tenemos que α y β son complementarios (¿Porqué?), por lo tanto:

$\alpha = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$

Ejemplo 3: Dado el $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que:

a) $a = 10cm$, $b = 8\,cm$ y $c = 6\,cm$
b) $a = 9\,cm$, $b = 11cm$ y $c = 5\,cm$
Decidir si los datos dados en a) y/o en b) corresponden a un triángulo rectángulo.

Solución

Tenemos que aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras
Para los datos dados en **a)**, si es rectángulo, la hipotenusa debería ser a y lo otros dos los catetos, en consecuencia debería cumplirse:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(1)\ a^2 = 100$$

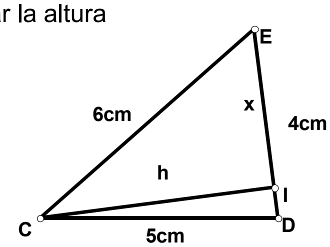
$$(2)\ b^2 + c^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

Por (1) y (2), se cumple el teorema de Pitágoras, por lo tanto con estos datos el $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo en *A*.
Para los datos dados en **b)**, si es rectángulo, la hipotenusa debe ser *b* y lo otros dos los catetos, en consecuencia debe cumplirse:

$$b^2 = a^2 + c^2$$
$$(1)\ b^2 = 121$$
$$(2)\ a^2 + c^2 = 9^2 + 5^2 = 106$$

Por (1) y (2), tenemos que no se cumple el teorema de Pitágoras, por lo tanto con estos datos el $\overset{\Delta}{ABC}$ no es rectángulo.

Ejemplo 4: Dado un triángulo de lados 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm*, calcular la altura sobre el lado menor y el área.



Solución
Al observar la figura, vemos que la altura divide al triángulo dado en dos triángulos: $\overset{\Delta}{CID}$ y el $\overset{\Delta}{CIE}$.
Al considerar estos triángulos rectángulos y aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 6^2 = h^2 + x^2 \\ 5^2 = h^2 + (4-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 36 = h^2 + x^2 \\ 25 = h^2 + (4-x)^2 \end{array}\right.$$

Al resolver el sistema, tenemos: $h \cong 4.96cm$, $x \cong 3.38cm$ y $A \cong 9.90cm^2$

La altura pedida es de 4.96 cm y el área es de 9.90 cm²

5.2 TRIGONOMETRÍA

La trigonometría plana tiene como objetivo resolver triángulos. Cada triángulo está constituido por seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo, significa determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos.

5.2.3 Razones trigonométricas del triángulo rectángulo

Dado cualquier triángulo rectángulo *ABC*, se pueden considerar las siguientes razones entre los lados del triángulo:

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{b}{c} \qquad (1)$$

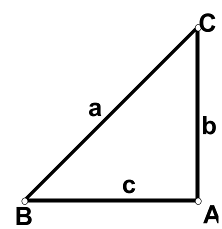
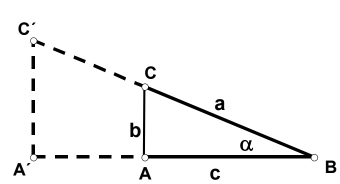


Figura 1

Dado cualquier otro triángulo semejante al dado, por ejemplo, el $\overset{\Delta}{A'BC'}$, tenemos:



$$\frac{b}{a} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}},\quad \frac{c}{a} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}},\quad \frac{b}{c} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BA'}}$$

Por lo que podemos afirmar:

> Las razones dadas en (1), no dependen de la longitud de los lados, sino de la medida del ángulo y se las llama **razones trigonométricas**.

Definición: Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo *ABC*, como el dado en la figura 1, son:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adyacente\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{cateto\ adyacente\ de\ \alpha}$$

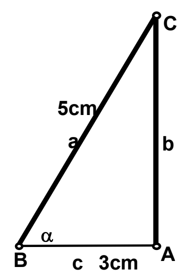
Nota 1: Si bien hay otras 3 funciones trigonométricas, no vamos a tratarlas aquí.

Nota 2: Observamos que tanto el seno como el coseno son relaciones entre un cateto y la hipotenusa, en tanto que la tangente es una relación entre catetos.

Ejemplo 1: Encontrar el valor exacto de cada una de las tres funciones trigonométricas.

Solución

Para encontrar la longitud del cateto desconocido se usa el Teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$b = \sqrt{16} = 4cm$$

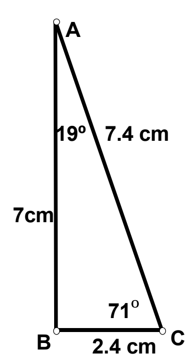
Ahora podemos calcular las razones pedidas:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{4}{5},\quad cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{3}{5},\quad tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2: Calcular las razones trigonométricas del triángulo rectángulo de lados 7 *cm*; 7,4 *cm* y 2,4 *cm*. para el ángulo de 19º.

Solución

Como el triángulo es rectángulo, el mayor de los lados es la hipotenusa, o sea 7,4 *cm*.
y el otro ángulo mide: $90^o - 19^o = 71^o$
Sabemos que a mayor ángulo se opone mayor lado, obtenemos la siguiente figura.
Con lo cual, ahora podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 19º.



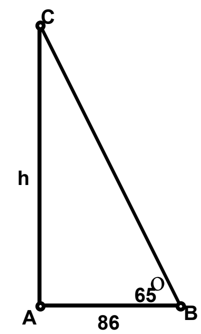
$$sen\ 19^o = \frac{2.4}{7.4} = 0.3\overset{\frown}{24},\quad cos\ 19^o = \frac{7}{7.4} = 0.9\overset{\frown}{45}$$

$$tg\ 19^o = \frac{2.4}{7} = 0.3428571...$$

Nota: Se pueden obtener en forma inmediata las razones trigonométricas para el ángulo 71°.

Ejemplo 3: Si los rayos del sol forman un ángulo de 65° con el suelo y, la sombra de un mástil es de 86 *cm*. ¿Cuál el la altura del mástil medido en metros?

Solución



$$tg\,65^{\circ} = \frac{h}{86} \Rightarrow h = 86.tg\,85^{\circ}$$

Usando la calculadora tenemos que $tg\,65^{\circ} \cong 2.14445069$ y en consecuencia:

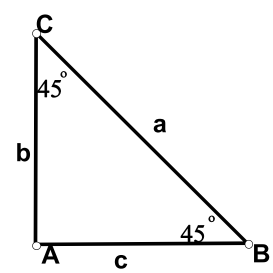
$$h \cong 184.4276cm \cong 1.84m$$

El mástil mide aproximadamente 1.84 *m*

5.2.3 Cálculo exacto de las razones trigonométricas para ángulos particulares

A veces, necesitamos y podemos calcular algunas razones trigonométricas para unos determinados ángulos:

1) Ángulo de 45º



Tenemos un triángulo rectángulo e isósceles (es una de los dos escuadras clásicas). Se calcula la hipotenusa suponiendo los lados iguales $b = c$ y se pueden suponer , sin pérdida de generalidad, de valor 1.

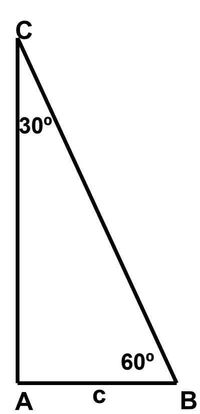
$$a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$$

Supongamos que $b = 1$, tenemos: $a = \sqrt{2}$, y como puede observarse

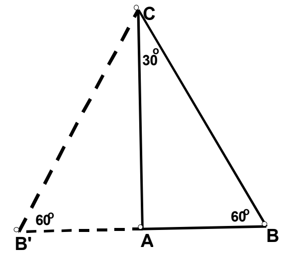
$$sen\ 45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y \quad cos\ 45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ son iguales y } tg\ 45^{o} = 1$$

2) Ángulos de 30º y 60º

Esta es la otra escuadra clásica:



Usando esta escuadra, se le adosa otra escuadra, como lo muestra la figura siguiente, y obtenemos un triángulo equilátero, ya que todos sus ángulos miden 60º.



Como el tamaño no afecta a los cálculos, podemos suponer que cada lado mide 2 unidades.
La altura h del triángulo es:

$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ usando el Teorema de Pitágoras

$\text{sen } 30^o = \frac{1}{2}$ $\quad$ $sen\ 60^o = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 30^o = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $cos\ 60^o = \frac{1}{2}$

$tg\ 30^o = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $tg\ 60^o = \frac{h}{1} = \sqrt{3}$

Nota: Se observa que: $sen\ 30^o = \frac{1}{2} = cos\ 60^o$, $\quad$ $cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen\ 60^o$

No pasa lo mismo para las tangentes, ya que una es la recíproca de la otra: $tg\ 30^o = \frac{1}{tg 60^o}$

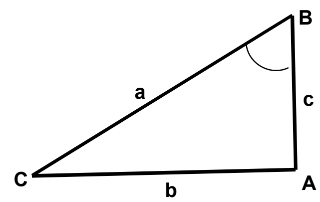
EJERCICIO

1: Si nos alejamos en la línea recta 30 *m*, sólo hay que levantar la vista 30º para ver la punta de la antena. ¿Cuál es la altura de la antena?.

Observación: Los valores obtenidos pueden sintetizarse en la siguiente tabla:

Ángulo en grados	0º	30º	45º	60º	90º
$sen\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no está definida

5.2.3 Algunas relaciones fundamentales



1º Relación : Esta tiene que ver con el Teorema de Pitágoras. En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tenemos:

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow\ b = a\ sen\ \hat{B}$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow\ c = a\ cos\ \hat{B}$$

Por Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ sustituyendo por las fórmulas anteriores obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(a\,sen\,\hat{B}\right)^2 + \left(a\,cos\,\hat{B}\right)^2 = a^2\left(sen^2\,\hat{B} + cos^2\,\hat{B}\right)$$

y dividiendo por a^2 obtenemos:

$$\boxed{sen^2\,\hat{B} + cos^2\,\hat{B} = 1}$$

2º Relación:

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ obtenemos: $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$, $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}$, $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{B}}$

$$\boxed{tg\,\hat{B} = \frac{sen\hat{B}}{cos\hat{B}}}$$

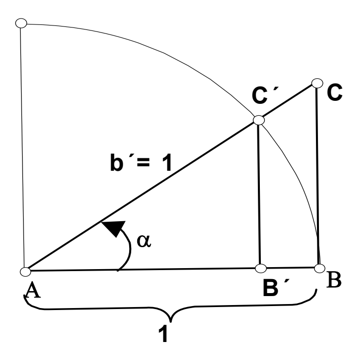
3º Relación:

Si α es un ángulo agudo ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) entonces:

$$0 < sen\alpha < 1$$

$$0 < cos\,\alpha < 1$$

$$tg\alpha > 0$$



Nota: El $sen\,\alpha$ y $tg\,\alpha$ crecen al crecer el ángulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$. En cambio el $cos\,\alpha$ decrece al crecer el ángulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 1: Sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{3}$ encontrar las otras dos razones trigonométricas.

Solución

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha \quad \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{y} \quad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 2: Sea $tg\ \alpha = 3$ calcular $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$

Solución

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \quad \Rightarrow \quad sen\ \alpha = 3\,cos\ \alpha$$

reemplazando en la 1º relación: $sen^2\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ resulta:

$$(3\ cos\ \alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 9\ cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 10\,cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\,\alpha = \frac{1}{10}$$

Por lo tanto: $cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y $sen\ \alpha = 3.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3.\sqrt{10}}{10}$

5.3 ÁNGULOS ORIENTADOS

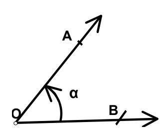
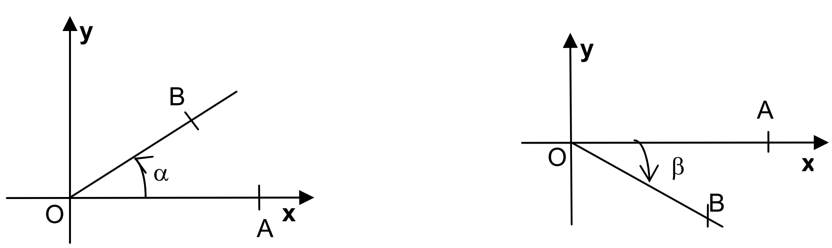


Figura 2

Recordemos que un ángulo es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo.
La posición inicial se llama **lado inicial**, $\overline{OA}$, la posición final se llama **lado terminal,** $\overline{OB}$**.** El punto fijo se llama **vértice**, *O*, (ver figura 2).
Si la rotación se realiza en sentido antihorario (levógiro) el ángulo se considera **positivo**, como en la figura 2, en caso contrario **negativo** (dextrógiro).

Representamos los ángulos orientados referidos a un par de ejes perpendiculares ***x*** e ***y***, llamados **ejes cartesianos ortogonales**. Dada una semirrecta con origen en el origen de coordenadas y coincidiendo con el semieje positivo ***x***, al rotarla genera un ángulo, ver figura 3.



Ángulo positivo

Ángulo negativo

Figura 3

Diremos que un ángulo está en **posición normal** si su vértice está en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje ***x***.
La figura 3, muestra como los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro partes, llamados cuadrantes. Diremos que un ángulo pertenece a un cuadrante dado si en él está ubicado el lado terminal del ángulo. En la figura 3, se muestra un ángulo α positivo, en el primer cuadrante y un ángulo β negativo, ubicado en el cuarto cuadrante.

No hay límite para la magnitud de un ángulo. Si una semirrecta efectúa una rotación completa en sentido antihorario, habrá generado un ángulo de 360º o ángulo completo. Dos rotaciones completas en el mismo sentido generarán un ángulo de 720º. Si lo hacen en sentido contrario determinarán ángulos negativos.

Dos ángulos orientados son iguales si y sólo si están generados por la misma rotación

.

La figura 4 muestra dos ángulos distintos a pesar que coinciden los lados iniciales y los lados terminales.

$\alpha \neq \beta$

$\beta = \alpha + 2\pi$

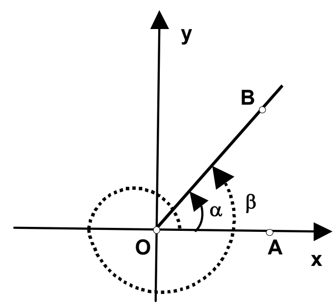


Figura 4

5.4 SISTEMA CIRCULAR: OTRA FORMA DE MEDIR ÁNGULOS

*Además del sistema sexagesimal que es la forma usual de medir ángulos en la vida cotidiana, existen otros sistemas para medir ángulos, entre ellos el sistema circular. La ventaja de este sistema es que medimos los ángulos en radianes, que son **números reales**.*

5.4.1 Radianes

La longitud de una circunferencia de radio *r* está dada por la fórmula:

$$L = 2\pi r$$

En el caso de una circunferencia unitaria, es decir, una circunferencia de radio *r* =1, la longitud es de 2π.

Consideremos el arco ***AB*** y sea ***s*** la longitud de dicho arco. La medida de un ángulo en radianes es:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{longitud\ \ del\ \ arco}{radio} \qquad (1)$$

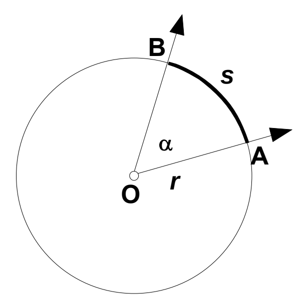


Figura 5

Por ejemplo, un ángulo completo mide 2π radianes, un ángulo llano, π radianes y un ángulo recto $\frac{\pi}{2}$ radianes, o en forma aproximada, 6.28 radianes, 3.14 radianes y 1.57 radianes, respectivamente.

Con cualquiera de los datos obtenidos se pueden obtener las fórmulas de conversión de ángulos medidos en radianes a ángulos medidos en grados y viceversa.
Dado que un ángulo llano es equivalente a π radianes, obtenemos:

$$\pi\, radianes = 180^{o}$$

Por lo tanto

$$\textbf{1 radián} = \frac{180}{\pi}\ \textbf{grados} \cong 57.30^{o}$$

$$1^{o} = \frac{\pi}{180}\ \textbf{radianes} \cong 0.00075\ rad$$

Nota: Utilizaremos ***rad*** como abreviatura de radianes.

Observación: Recordemos de geometría que, dadas dos circunferencias concéntricas de radios *r* y *r´*, respectivamente, para un mismo ángulo α que subtiende los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{A'B'}$ (ver figura 6), se cumple: $\frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{r'}$. En consecuencia, la razón dada en (1) sólo depende del ángulo y por esto, se la toma como medida del ángulo.

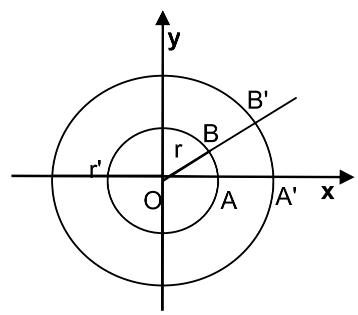


Figura 6

En particular, si $r = 1$ resulta que la medida de α es $\overset{\frown}{AB} = s$.

Ejemplo1: ¿Cuántos grados hay en un ángulo de $\frac{1}{9}\pi\, rad$?

Solución
Por lo visto anteriormente tenemos:

$1\ rad = \frac{180}{\pi} grados$

por lo tanto:

$\frac{1}{9}\pi\, rad = \frac{1}{9}\pi\ \frac{180}{\pi}$ grados = 20^{o}

Cuando se usa la calculadora para calcular el valor de las razones trigonométricas, verificar que se encuentra en **Modo Grados** (sexagesimales) o **Modo Radianes** según sea la medida que se está usando.

Ejemplo 2: ¿Cuántos radianes hay en un ángulo de 60^{o}?

Solución

En forma análoga al ejercicio anterior, pero utilizando la fórmula $1^{o} = \frac{\pi}{180} rad$

Tenemos: $60^{o} = 60\ \frac{\pi}{180} rad = \frac{\pi}{3} rad = 1.05\ rad$

Haciendo los cálculos correspondientes, podemos realizar la siguiente tabla:

grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5.5 LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Sea $C(O,1)$ una circunferencia con centro en el origen de coordenadas $\boldsymbol{O}(0,\,0)$ y radio la unidad. Si se construye un ángulo α con vértice en el origen y sentido positivo podemos obtener las razones trigonométricas de ese ángulo llamadas funciones o líneas trigonométricas. Se determinan los triángulos $\overset{\Delta}{OBA}$ y $\overset{\Delta}{OB'A'}$ tales que: el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud b, el $\overline{OB}$ longitud a, el $\overline{A'B'}$ tiene longitud b' y $\overline{OA}$ y $\overline{OB'}$ por construcción tienen longitud 1, es decir, $A(a,b)$, $B(a,0)$, $A'(1,b')$, $B'(1,0)$.

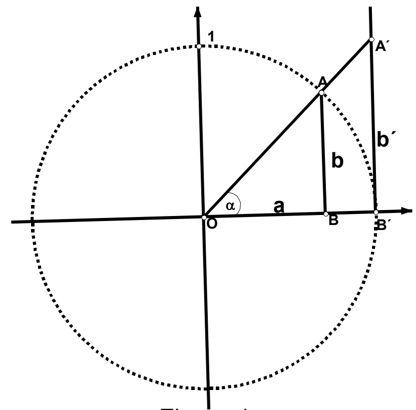


Figura 1

Con estos datos obtenemos :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} = b$$ o sea el seno es la ordenada del punto A.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} = a$$ el coseno es la abscisa del punto A.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'} = b'$$ es la ordenada del punto A’

Observación: Escojamos otro punto P’ cualquiera, a una distancia $\rho > 0$ sobre el lado terminal de α. P' con coordenadas (x', y') determina un triángulo $\overset{\Delta}{OP'Q'}$ semejante al $\overset{\Delta}{OPQ}$,

donde: $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{OP'}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$,es decir:

$$\frac{y'}{\rho} = \frac{y}{1} = sen\,\alpha\,.$$

Del mismo modo se obtiene:

$$cos\,\alpha = \frac{x'}{\rho},\ tan\,\alpha = \frac{y'}{x'}.$$

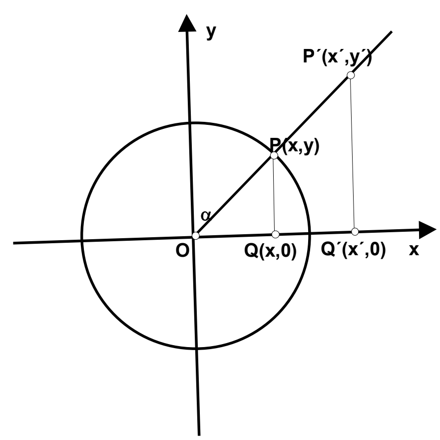


Figura 2

Por tanto, **el valor de cualquier línea trigonométrica de un ángulo depende solamente de la magnitud del ángulo y no del punto que se haya tomado sobre el lado terminal.**

En particular obtenemos las identidades: $cos(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha$, $sen(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha$.
Por esta razón, se las llama funciones periódicas, y en este caso, son de período 2π .

Una ecuación del círculo unitario con centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Ya que $x = cos\,\alpha$ e $y = sen\,\alpha$ se sigue que:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

que es una de las relaciones fundamentales de la trigonometría.

Ejemplo 1: Hallar las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por cada uno de los siguiente puntos :

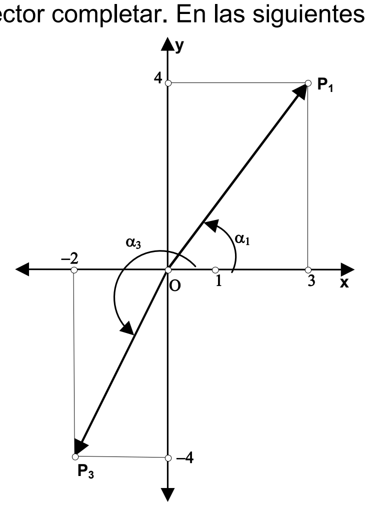
a) $P_1(3,4)$; b) $P_2\left(-1, \sqrt{3}\right)$; c) $P_3(-2, -4)$; d) P_4 (2, -1)

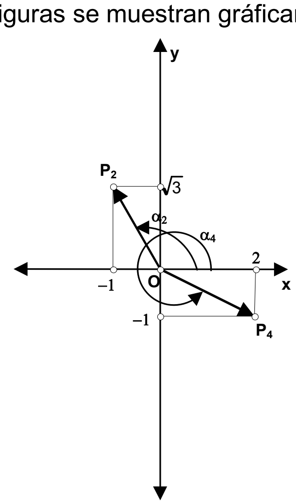
¿Qué conceptos teóricos utiliza?

Solución

b) $\rho = 2;\;\; sen\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\;\; \cos\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}; \tan\alpha_2 = -\sqrt{3}$

Queda para el lector completar. En las siguientes figuras se muestran gráficamente la solución.





5.5.1 Signo de las líneas trigonométricas

El signo de las líneas trigonométricas de cualquier ángulo, depende de los signos de las coordenadas de un punto cualquiera del lado terminal ya que $\rho > 0$. Así, en el primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas, por lo tanto seno y coseno son positivos y como consecuencia todas las demás. Tenemos entonces el siguiente cuadro:

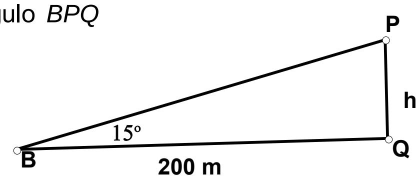
α	I	II	III	IV
$sen\,\alpha$	+	+	-	-
$cos\,\alpha$	+	-	-	+
$tan\,\alpha$	+	-	+	-

Queda para el lector hacer figuras similares a la figura 2 para los cuadrantes restantes.

5.6 SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1: Un cohete dista 200 m de la puerta y desde ella se observa el extremo del cohete formando un ángulo de 15º por encima de la horizontal. Calcular la altura que está el cohete.

Si hacemos un esquema tenemos un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BPQ}$



$$tg\ 15^o = \frac{h}{200} \quad \Rightarrow h = 200 \cdot tg15^o =$$

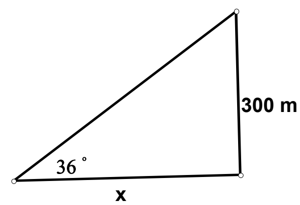
$$\cong 200 \cdot 0.26799491$$

$$\cong 53.589839$$

El cohete está a aproximadamente a 53.60 *m*

2: Sabiendo que la torre Eiffel mide 300 m de altura ¿cuánto hay que alejarse para que su extremo se vea, desde el suelo, 36º por encima de la horizontal.

Solución
Haciendo un esquema



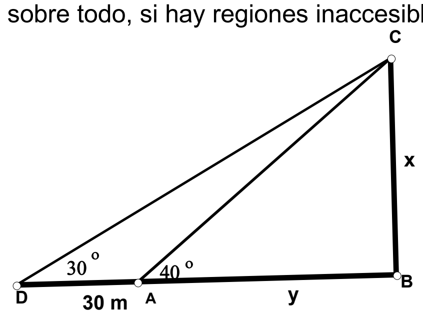
$$\text{tg } 36^o = \frac{300}{x} \Rightarrow x \text{ tg}36^o = 300\ m \Rightarrow$$

$$x = \frac{300m}{tg\ 36^o} = \frac{300}{0.7265} = 412.938\ m$$

Debe alejarse de la torre casi cuatro cuadras.

3: A veces, necesitamos usar triángulos superpuestos, sobre todo, si hay regiones inaccesibles.

Desde un patio vemos el extremo superior de una antena de televisión levantando la vista un ángulo de 40^{o}. Si nos alejamos en la línea recta 30 m, solo hay que levantar la vista 30º para ver la punta de la antena. ¿Cuál es la altura de la antena?.



Solución

Aquí se tienen dos triángulos, cada uno de ellos con datos insuficientes para resolver el problema. Utilizando ambos, en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tenemos:

$tg\ 40^o = \frac{x}{y}$ no se conoce x ni y de estos datos, pero como la tangente $tg\ 40^o \cong 0.839$

$$0.839 = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow x = 0.839\, y$$

En el triángulo $\overset{\Delta}{DBC}$ tenemos: $tg30^o = \frac{x}{30+y} \Rightarrow 0.577 = \frac{x}{30+y} \quad \Rightarrow \quad x = 0.577\,(30+y)$

En consecuencia tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en las cuales se despeja x

$$\begin{cases} x = 0.839\ y \\ x = 0.577\ (30+y) \end{cases}$$

igualando obtenemos: $0.839y = 0.577(30+y) \rightarrow 0.389y = 0.577 \cdot 30 + 0.577y$

agrupando las variables en un solo miembro, resulta:

$$0.839y - 0.577y = 17.31 \quad \Rightarrow \quad (0.839 - 0.577)y = 17.31$$

$$y = \frac{17.31}{(0.839 - 0.577)} = \frac{17.31}{0.262} \cong 66.068702 \ m \cong 66.069 \ m$$

$$x = 0.839 \cdot y \cong 0.839 \cdot 66.069 \cong 55.38\, m$$

La altura de la antena es aproximadamente 55.38 *m*

5.7 Práctico: Resolución de Triángulos Rectángulos

Ejercicio 1: Se sabe que la diagonal del cuadrado mide 7 *cm*. ¿Cuál es la longitud del lado?.

Ejercicio 2: Calcular el perímetro y el área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$ en el que se sabe que:

$\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 24\ cm$ y $h = 5\ cm$ es la altura correspondiente al vértice B

Ejercicio 3: Se sabe que el área del rombo es $\frac{d \cdot D}{2}$, o sea la mitad del producto de las diagonales. Obtener el área del rombo de 40 *cm* de perímetro y la diagonal menor $d = 12\ cm$.

Ejercicio 4: En un triángulo equilátero la altura mide 3 *cm*. ¿Cuánto miden los lados?

Ejercicio 5: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 *cm* y uno de los catetos mide el triple que el otro.

a) ¿Cuánto miden los catetos?
b) Calcular el área.

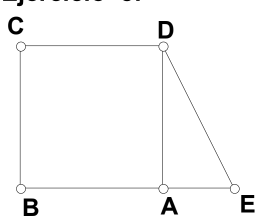
Ejercicio 6: Determinar en cada caso las medidas de las diagonales de los rectángulos de base **b** y altura **h**

a) **b =** 8 *cm* **h** = 6 *cm* b) **b** = 4 *cm* **h =** 8 *cm*

Ejercicio 7: Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado **L** mide:

a) **L=** 2 *m* b) **L=** 0,6 *m* c) **L=** $\sqrt{5}$ *dm*

Ejercicio 8:



El área del cuadrilátero BCDE es de $27\,cm^2$. El área del triángulo ADE es $\frac{1}{3}$ del área del cuadrado ABCD.

Calcular la longitud de los lados del triángulo.

Ejercicio 9: Pasar de grados sexagesimales a radianes:

a) 136º b) 45º c) 235º d) 60º e) 300º f) 420º

Ejercicio 10: Pasar de radianes a grados sexagesimales:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{2}$

Ejercicio 11: Si $sen\sigma = \frac{1}{3}$ encuentre el valor exacto de:

a) $cos\ \sigma$ b) $cos(90^o - \sigma)$

Ejercicio 12: Si $tg\ \sigma = 4$ encuentre el valor exacto de $sen\ \sigma$ y $cos\ \sigma$

Ejercicio 13: a) Sabiendo que α es un ángulo agudo tal que $sen\,\alpha = 0.6$. Calcular $\cos\alpha$ y $\text{tg}\alpha$

b) Sabiendo que α es un ángulo agudo tal que $cos\,\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Calcular $sen\alpha$ y $tg\alpha$

Ejercicio 14: Resolver el triángulo rectángulo, usando la información dada:

I) $b = 5$ $\qquad \beta = 25^o$

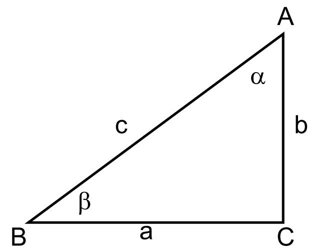
II) $a = 6$ $\qquad \beta = 45^o$

III) $b = 4$ $\qquad \alpha = 12^o$

IV) $a = 5$ $\qquad \alpha = 30^o$

v) $c = 10$ $\qquad \alpha = 40^o$

VI) $c = 9$ $\qquad \beta = 25^o$



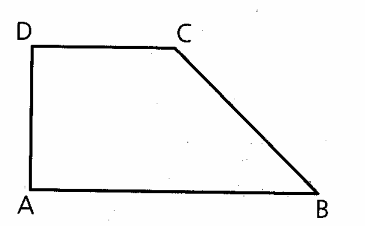
VII) $a = 2$ $\qquad b = 8$ $\qquad$ VIII) $a = 2$ $\qquad c = 5$

IX) $b = 4$ $\qquad c = 6$

Ejercicio 15: Sea *ABC* un triángulo rectángulo en *A*, tal que $\overline{AB} = 4\,cm\ y\ \overline{AC} = 3\,cm$. Si *A, B, C* son los ángulos, calcular*: cos B, sen B, tg B, cos C, sen C y tg C.*

Ejercicio 16: En un triángulo de lados 4 *cm*, 6 *cm* y 8 *cm*, calcular la altura sobre el lado mayor.

Ejercicio 17: En el cuadrilátero *ABCD*, el lado *AB* tiene el doble de la longitud del lado *CD*. Sabiendo además que los lados *AD* y *CD* son iguales, siendo su medida 3 *cm*, calcular el perímetro y el área del cuadrilátero.



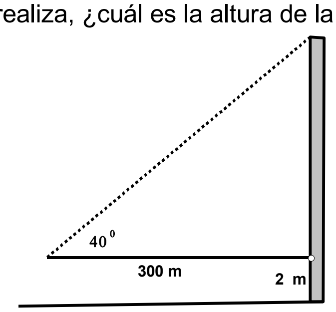
Ejercicio 18: Un tramo de carretera forma un ángulo de 15° con la horizontal. Al recorrer 200 *m* por la carretera, ¿Cuántos metros se ha ascendido en vertical?

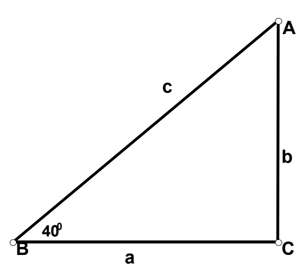
Ejercicio 19: De un rombo se conoce una diagonal, 24 *cm*, y el lado, 13 *cm*. Encontrar la medida de la otra diagonal.

Ejercicio 20: Encontrar la altura de un trapecio isósceles cuyos lados paralelos miden 4 *cm* y 9 *cm* y los otros 6,5 *cm*..

Ejercicio 21: Un camino recto con inclinación uniforme lleva desde un hotel a 2640 metros hasta un mirador situado a 3663 metros. Si la longitud del camino es de 4653 metros. ¿Cuál es la pendiente del camino?.

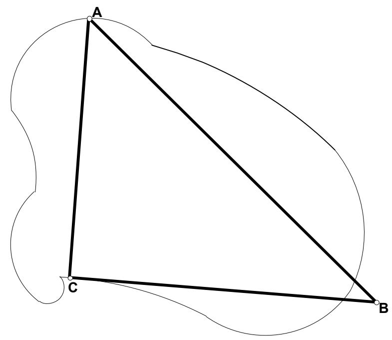
Ejercicio 22: Para determinar la altura de una torre de transmisión de televisión, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. Luego mide el ángulo de elevación y encuentra que es de 40º. Si el teodolito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?.



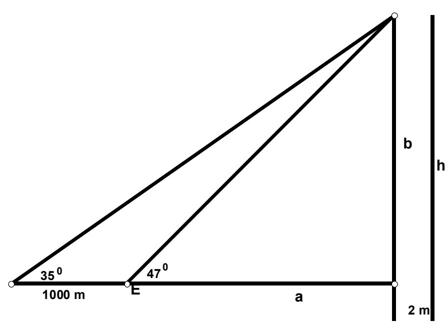


Ejercicio 23: Encuentre la distancia inaccesible $\overline{AC}$, del estanque, sabiendo que

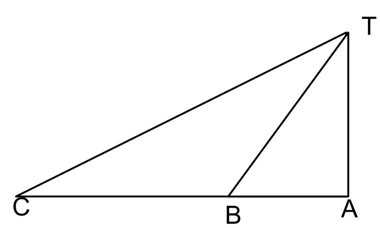
$\overline{BC} = 35$ metros y el ángulo $C\hat{B}A = 40^o$.



Ejercicio 24: Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 1000 metros en línea recta hacia la montaña. La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47º, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35º. Si el teodolito está dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?.



Ejercicio 25: En el siguiente dibujo, *AT* representa una torre, *A* el pie de la torre, *B* y *C* puntos alineados con *A*, siendo *BC* = 50 *m*, el ángulo *ABT* = 60º y el ángulo *BCT* = 30 º. ¿Cuál es la altura de la torre?



Ejercicio 26:¿En un viaje por una carretera horizontal y recta nos dirigimos hacia el punto más alto de una montaña. En un instante dado medimos el ángulo de elevación y es, de 30º, Recorremos 2 kilómetros y al medir éste es de 45 º. ¿Cuál es la altura de la montaña respecto de la carretera donde hemos hecho las mediciones?

Ejercicio 27: Una estatua está colocada sobre una columna de 15 metros. Desde un punto del suelo situado en la misma horizontal que el pie de la columna, vemos la columna bajo un ángulo de 45º, y la estatua bajo un ángulo de 15º más, ¿Cuál es la altura de la estatua?

Ejercicio 28: Se sabe que el aro de baloncesto esta a 3,3 metros del piso. Los ojos de un jugador de baloncesto están a 1,98 metros del piso. Si el jugador se encuentra en la línea de tiro libre a 5 metros del centro del aro de la canasta. ¿Cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador al centro del aro?.

Ejercicio 29: Un cierto día de primavera, un edificio de 100 *m* de altura proyectó una sombra de 16,50 *m* de largo. ¿Cuál era el ángulo de elevación del sol?

Ejercicio 30: En un rectángulo, uno de los lados mide 5 *cm* y su área es de 50 cm^2. ¿Cuánto mide la diagonal?.

Ejercicio 31: En un cuadrado, cuyo perímetro es de 8 *cm* se han marcado los puntos medios de los lados. Calcular el perímetro y el área del cuadrado que se obtiene al unir esos puntos.

Ejercicio 32: Se inscribe un cuadrado en una circunferencia de radio $r = 8\,cm$

a) ¿Cuánto miden el lado y la diagonal de ese cuadrado?.
b) Calcular aproximadamente el área de la porción del círculo que no está ocupada por el cuadrado?.
c) Si se quisiera el valor exacto del área pedida en la parte anterior ¿cómo se expresaría?.

Ejercicio 33: En un triángulo rectángulo los catetos miden $3\sqrt{5}$ y $4\sqrt{5}$. ¿Cuánto mide su hipotenusa?. ¿Cuál es su perímetro?.

Ejercicio 34: Encontrar el valor exacto de cada una de las tres funciones trigonométricas de un ángulo positivo si $(4,-3)$ es un punto en su lado terminal.

Ejercicio 35: Dado $sen\,\delta = \frac{1}{3}$ y $cos\,\delta < 0$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras dos funciones trigonométricas.

Ejercicio 36: Utilice la periodicidad de las funciones para encontrar el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

I. $sen\,405^o$

II. $cos\,420^o$

III. $tg\,21\pi$

IV. $cos\,\frac{33\pi}{4}$

.