RESUMEN DE SISTEMAS DE FUERZAS-PAR Y LLAVE DE TORSION

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

**1.** ***Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A.*** La fuerza **R** es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a $A$ de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición **r** se traza desde $A$ hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de **F**.

**2.** ***Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B.*** Si después de que se había reducido a un sistema fuerza-par en el punto $A$ se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto $B$, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a $B$. La resultante **R** permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a $B$ de la fuerza **R** aplicada en $A$ [problema resuelto 3.8]. Si se representa con **s** el vector trazado desde $B$ hasta $A$, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

**3.** ***Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no.*** Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par *en el mismo punto arbitrario A* (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos, esto es, si

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma\mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante **R**, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

**4.** ***Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza.*** Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente $A$ donde dicho sistema consta de la resultante **R** y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en el punto 1). Se recordará, de la lección anterior, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *sólo si la fuerza* **R** *y el* *vector de par* $\mathbf{M}_A^R$ *son mutuamente perpendiculares*. Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes*, *coplanares* o *paralelas*. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección anterior, moviendo $\mathbf{R}$ hasta que su momento con respecto a $A$ sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición $\mathbf{r}$ trazado desde $A$ hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

**5. *Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión.*** Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto $A$ consistirá de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.47)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

*a)* Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$), localizado, comúnmente, en el origen $O$.

*b)* Determinar el paso $p$ a partir de la ecuación (3.62)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

*c)* Expresar que el momento con respecto a $O$ de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en $O$:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ está dirigido desde $O$ hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.