

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Principio de transmisibilidad

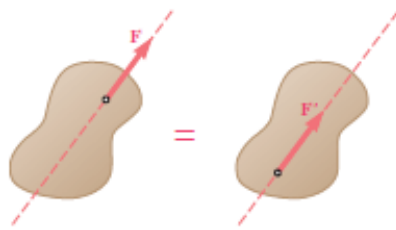


Figura 3.48

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas e internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{F}' , que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Producto vectorial de dos vectores

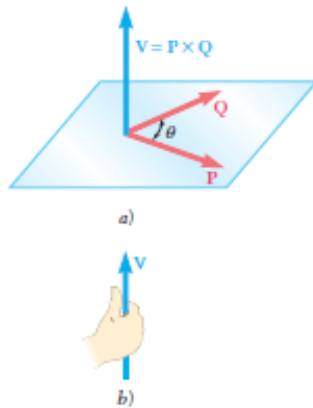


Figura 3.49

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de \mathbf{V} verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector \mathbf{P} colineal con el vector \mathbf{Q} como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.



Figura 3.50

Las componentes rectangulares del producto vectorial \mathbf{V} de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de \mathbf{r} y \mathbf{F} , se encontró que la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} .

Las componentes rectangulares del momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde x , y y z son las componentes del vector de posición \mathbf{r} (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

En el caso más general del momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B , se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

Componentes rectangulares del producto vectorial

Momento de una fuerza con respecto a un punto

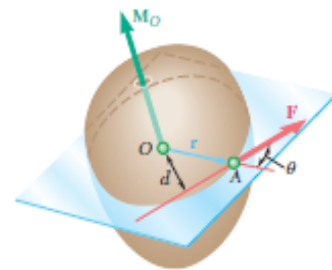


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

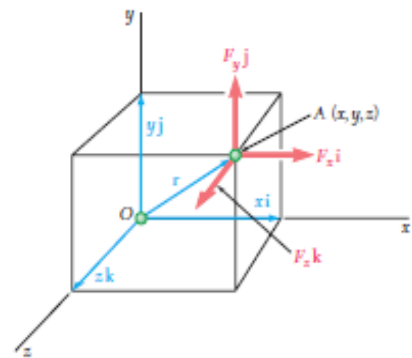


Figura 3.52

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza \mathbf{F} se encuentra en el plano xy . Su momento \mathbf{M}_B con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

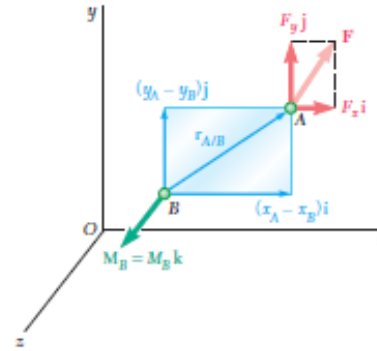


Figura 3.53

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.9] se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

La *proyección de un vector \mathbf{P} sobre un eje OL* (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de \mathbf{P} y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL . Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

El *producto triple escalar* de los tres vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.10]. Se mostró que

Producto escalar de dos vectores

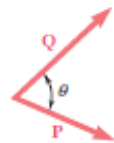


Figura 3.54

Proyección de un vector sobre un eje

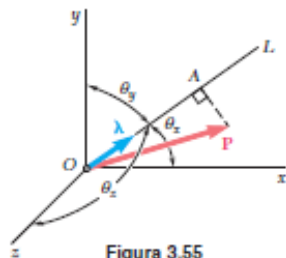


Figura 3.55

Producto triple escalar de tres vectores

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un eje OL [sección 3.11] se definió como la proyección OC sobre OL del momento \mathbf{M}_O de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, el vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} :

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL
 $x, y, z =$ componentes de \mathbf{r}
 $F_x, F_y, F_z =$ componentes de \mathbf{F}

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector \mathbf{M} perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

Dos pares que tienen el mismo momento \mathbf{M} son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento \mathbf{M} del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento \mathbf{M} del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.58).

Momento de una fuerza con respecto a su eje

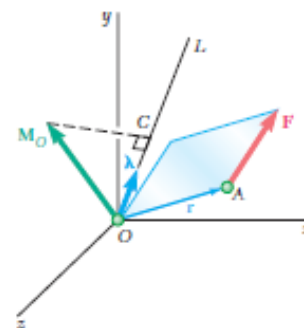


Figura 3.56

Pares

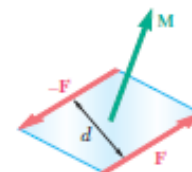


Figura 3.57

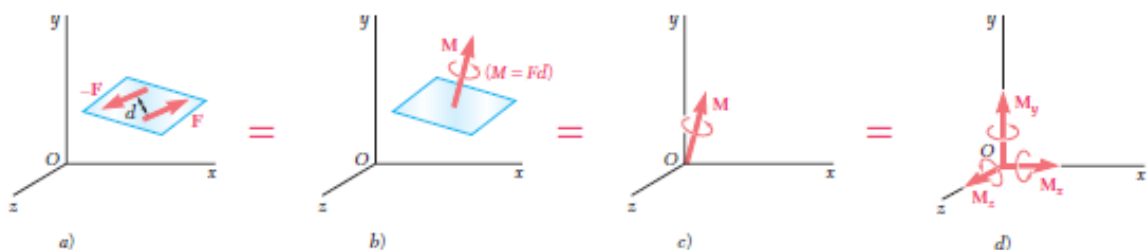


Figura 3.58

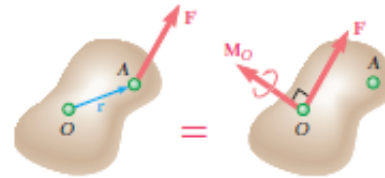


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario O el cual consta de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O y un par de momento \mathbf{M}_O , igual al momento de la fuerza \mathbf{F} en su posición original con respecto a O [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza \mathbf{F} y el vector de par \mathbf{M}_O siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O* , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante \mathbf{R} y al vector de par resultante \mathbf{M}_O^R [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_O^R no serán perpendiculares entre sí.

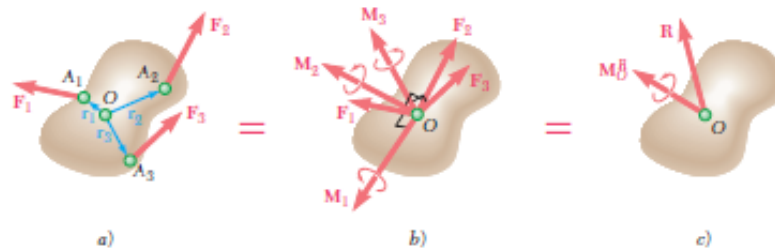


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ y $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, son equivalentes si, y sólo si,*

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Si la fuerza resultante \mathbf{R} y el vector de par resultante \mathbf{M}_O^R son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a)* fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b)* fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c)* fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_O^R no son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede ser reducido* a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_1 dirigido a lo largo de \mathbf{R} [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

