

# Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad



En la fotografía se muestra la construcción de un tramo del viaducto Skyway, el cual cruza la bahía que se encuentra entre San Francisco y Oakland. En este capítulo se introducirá el concepto del centroide de un área; en cursos posteriores se establecerá la relación existente entre la ubicación del centroide y el comportamiento de la carretera tendida sobre el viaducto.

## FUERZAS DISTRIBUIDAS: CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

- 5.1 Introducción
- Áreas y líneas
- 5.2 Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional
- 5.3 Centroides de áreas y líneas
- 5.4 Primeros momentos de áreas y líneas
- 5.5 Placas y alambres compuestos
- 5.6 Determinación de centroides por integración
- 5.7 Teoremas de Pappus-Guldinus
- 5.8 Cargas distribuidas en vigas
- 5.9 Fuerzas sobre superficies sumergidas
- Volúmenes
- 5.10 Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional. Centroide de un volumen
- 5.11 Cuerpos compuestos
- 5.12 Determinación de centroides de volúmenes por integración



**Fotografía 5.1** El balance preciso de los componentes de un móvil requiere de una comprensión de los centros de gravedad y centroides, que son los tópicos principales de este capítulo.

### 5.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha supuesto que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido podía representarse por una sola fuerza  $\mathbf{W}$ . Esta fuerza, denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, debía aplicarse en el *centro de gravedad* del cuerpo (sección 3.2). De hecho, la Tierra ejerce una fuerza sobre cada una de las partículas que constituyen al cuerpo. En este sentido, la acción de la Tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por un gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo. Sin embargo, en este capítulo se aprenderá que la totalidad de dichas fuerzas pequeñas puede ser reemplazada por una sola fuerza equivalente  $\mathbf{W}$ . También se aprenderá cómo determinar el centro de gravedad, esto es, el punto de aplicación de la resultante  $\mathbf{W}$ , para cuerpos de varias formas.

En la primera parte del capítulo se describen cuerpos bidimensionales como placas planas y alambres que están contenidos en un plano dado. Se introducen dos conceptos que están muy relacionados con la determinación del centro de gravedad de una placa o de un alambre: el concepto de *centroide* de un área o de una línea y el concepto del *primer momento* de un área o de una línea con respecto a un eje dado.

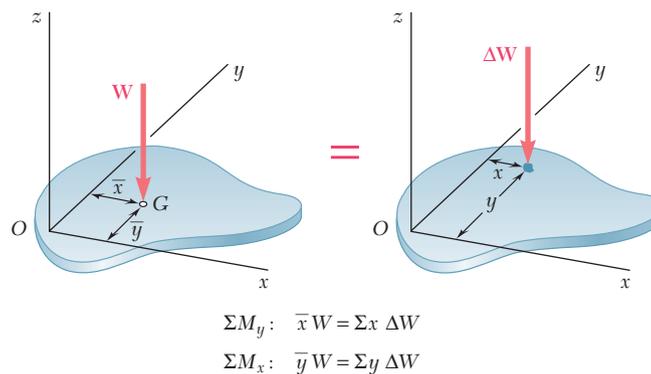
También se aprenderá que el cálculo del área de una superficie de revolución o del volumen de un cuerpo de revolución está directamente relacionado con la determinación del centroide de la línea o del área utilizados para generar dicha superficie o cuerpo de revolución (teoremas de Pappus-Guldinus). Además, como se muestra en las secciones 5.8 y 5.9, la determinación del centroide de un área simplifica el análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares sumergidas, como compuertas hidráulicas y porciones de presas.

Al final del capítulo se aprenderá cómo determinar tanto el centro de gravedad de cuerpos tridimensionales como el centroide de un volumen y los primeros momentos de dicho volumen con respecto a los planos coordenados.

### ÁREAS Y LÍNEAS

#### 5.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIONAL

Para iniciar, considere una placa plana horizontal (figura 5.1). La placa puede dividirse en  $n$  elementos pequeños. Las coordenadas del pri-



**Figura 5.1** Centro de gravedad de una placa.

mer elemento se representan con  $x_1$  y  $y_1$ , las del segundo elemento se representan con  $x_2$  y  $y_2$ , etcétera. Las fuerzas ejercidas por la Tierra sobre los elementos de la placa serán representadas, respectivamente, con  $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$ . Estas fuerzas o pesos están dirigidos hacia el centro de la Tierra; sin embargo, para todos los propósitos prácticos, se puede suponer que dichas fuerzas son paralelas. Por tanto, su resultante es una sola fuerza en la misma dirección. La magnitud  $W$  de esta fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos.

$$\Sigma F_z: \quad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$

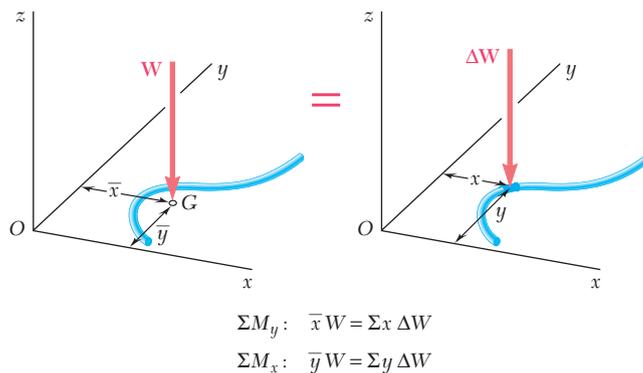
para obtener las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del punto  $G$ , donde debe aplicarse la resultante  $\mathbf{W}$ , se escribe que los momentos de  $\mathbf{W}$  con respecto a los ejes  $y$  y  $x$  son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{x}W &= x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n \\ \Sigma M_x: \quad \bar{y}W &= y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si ahora se incrementa el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento se obtienen, en el límite, las siguientes expresiones:

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones definen el peso  $\mathbf{W}$  y las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del centro de gravedad  $G$  de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano  $xy$  (figura 5.2). Se observa que usualmente el centro de gravedad  $G$  de un alambre no está localizado sobre este último.



**Figura 5.2** Centro de gravedad de un alambre.

### 5.3. CENTROIDES DE ÁREAS Y LÍNEAS

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme, la magnitud  $\Delta W$  del peso de un elemento de la placa puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma t \Delta A$$

donde  $\gamma$  = peso específico (peso por unidad de volumen) del material  
 $t$  = espesor de la placa  
 $\Delta A$  = área del elemento

En forma similar, se puede expresar la magnitud  $W$  del peso de toda la placa como

$$W = \gamma t A$$

donde  $A$  es el área total de la placa.

Si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, se debe expresar el peso específico  $\gamma$  en  $\text{lb/ft}^3$ , el espesor  $t$  en pies y las áreas  $\Delta A$  y  $A$  en pies cuadrados. Entonces, se observa que  $\Delta W$  y  $W$  estarán expresados en libras. Si se usan las unidades del SI, se debe expresar a  $\gamma$  en  $\text{N/m}^3$ , a  $t$  en metros y a las áreas  $\Delta A$  y  $A$  en metros cuadrados; entonces, los pesos  $\Delta W$  y  $W$  estarán expresados en newtons.<sup>†</sup>

Si se sustituye a  $\Delta W$  y a  $W$  en las ecuaciones de momento (5.1) y se divide a todos los términos entre  $\gamma t$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{x}A &= x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \cdots + x_n \Delta A_n \\ \Sigma M_x: \quad \bar{y}A &= y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \cdots + y_n \Delta A_n \end{aligned}$$

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se divide el área  $A$  y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el límite

$$\bar{x}A = \int x \, dA \quad \bar{y}A = \int y \, dA \quad (5.3)$$

Estas ecuaciones definen las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  también se conoce como el *centroide C del área A* de la placa (figura 5.3). Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme, la magnitud  $\Delta W$  del peso de un elemento de alambre puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma a \Delta L$$

donde  $\gamma$  = peso específico del material  
 $a$  = área de la sección transversal del alambre  
 $\Delta L$  = longitud del elemento

<sup>†</sup>Se debe señalar que en el Sistema Internacional de unidades generalmente se caracteriza a un material dado por su densidad  $\rho$  (masa por unidad de volumen) en lugar de caracterizarlo por su peso específico  $\gamma$ . Entonces, el peso específico del material se puede obtener a partir de la relación

$$\gamma = \rho g$$

donde  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Como  $\rho$  se expresa en  $\text{kg/m}^3$ , se observa que  $\gamma$  estará expresado en  $(\text{kg/m}^3)(\text{m/s}^2)$ , esto es, en  $\text{N/m}^3$ .

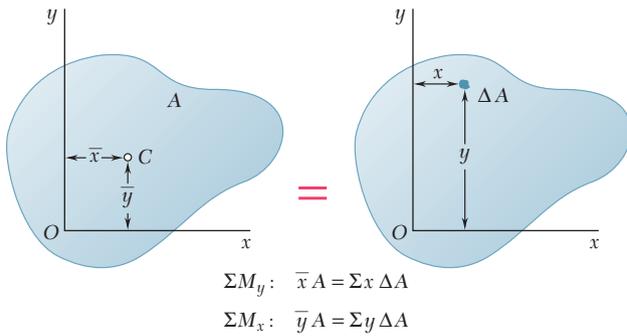


Figura 5.3 Centroide de un área.

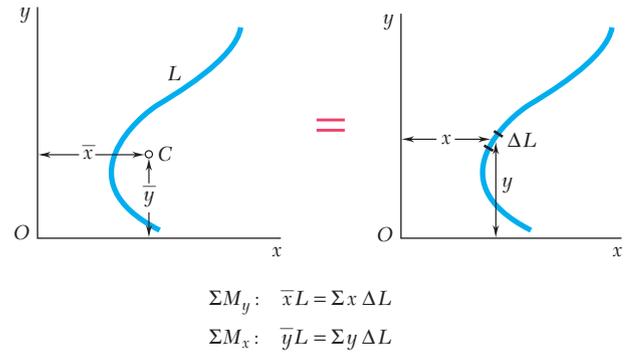


Figura 5.4 Centroide de una línea.

El centro de gravedad de un alambre coincide con el *centroide C de la línea L* que define la forma del alambre (figura 5.4). Las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del centroide de la línea L se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

#### 5.4. PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS Y LÍNEAS

La integral  $\int x dA$  en las ecuaciones (5.3) de la sección anterior se conoce como el *primer momento del área A con respecto al eje y* y se representa con  $Q_y$ . En forma similar, la integral  $\int y dA$  define el *primer momento de A con respecto al eje x* y se representa con  $Q_x$ . Así se escribe

$$Q_y = \int x dA \quad Q_x = \int y dA \quad (5.5)$$

Si comparamos las ecuaciones (5.3) con las ecuaciones (5.5), se observa que los primeros momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

A partir de las ecuaciones (5.6) se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma. Los primeros momentos de un área también son útiles en la mecánica de materiales para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales. Por último, a partir de las ecuaciones (5.6) se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Se pueden utilizar relaciones similares a partir de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para definir los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes coordenados y para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  de su centroide.

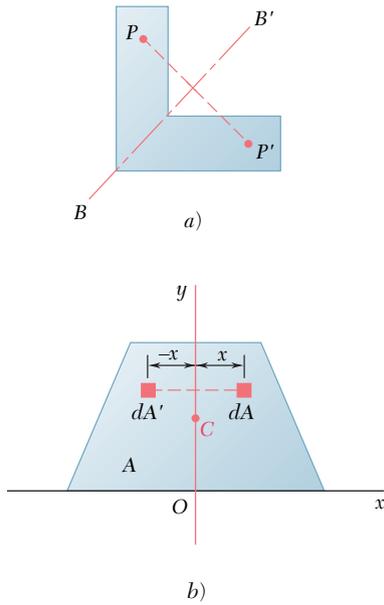


Figura 5.5

Se dice que un área  $A$  es *simétrica con respecto a un eje  $BB'$*  si para todo punto  $P$  del área existe un punto  $P'$  de esa misma área tal que la línea  $PP'$  sea perpendicular a  $BB'$  y dicha línea está dividida en dos partes iguales por el eje en cuestión (figura 5.5a). Se dice que una línea  $L$  es simétrica con respecto a un eje  $BB'$  si satisface condiciones similares. Cuando un área  $A$  o una línea  $L$  posee un eje de simetría  $BB'$ , su primer momento con respecto a  $BB'$  es igual a cero y su centroide está localizado sobre dicho eje. Por ejemplo, en el caso del área  $A$  de la figura 5.5b, la cual es simétrica con respecto al eje  $y$ , se observa que para cada elemento de área  $dA$  de abscisa  $x$  existe un elemento de área  $dA'$  que tiene la misma superficie y cuya abscisa es  $-x$ . Se concluye que la integral en la primera de las ecuaciones (5.5) es igual a cero y, por tanto, se tiene que  $Q_y = 0$ . También se concluye a partir de la primera de las relaciones (5.3) que  $\bar{x} = 0$ . Por consiguiente, si un área  $A$  o una línea  $L$  poseen un eje de simetría, su centroide  $C$  está localizado sobre dicho eje.

Además, se debe señalar que si un área o una línea posee dos ejes de simetría, su centroide  $C$  debe estar localizado en la intersección de esos dos ejes (figura 5.6). Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos, elipses, cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras simétricas, así como el centroide de líneas que tienen la forma de la circunferencia de un círculo, el perímetro de un cuadrado, entre otros.

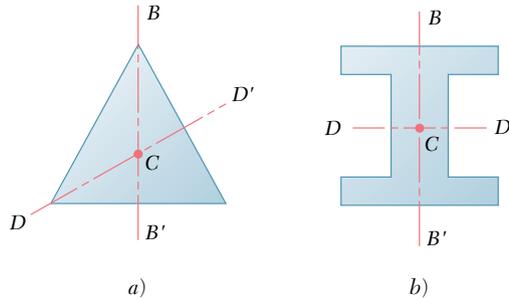


Figura 5.6

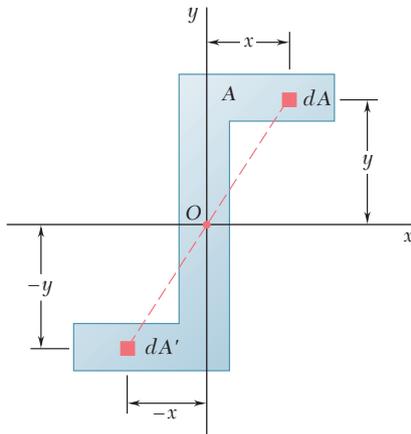


Figura 5.7

Se dice que un área  $A$  es *simétrica con respecto a un centro  $O$*  si para cada elemento de área  $dA$  de coordenadas  $x$  y  $y$  existe un elemento de área  $dA'$  de igual superficie con coordenadas  $-x$  y  $-y$  (figura 5.7). Entonces, se concluye que ambas integrales en las ecuaciones (5.5) son iguales a cero y que  $Q_x = Q_y = 0$ . También, a partir de las ecuaciones (5.3), se concluye que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , esto es, que el centroide del área coincide con su centro de simetría  $O$ . En forma análoga, si una línea posee un centro de simetría  $O$ , el centroide de la línea coincidirá con el centro  $O$ .

Se debe señalar que una figura con un centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría (figura 5.7) y que una figura con dos ejes de simetría no necesariamente tiene un centro de simetría (figura 5.6a). Sin embargo, si una figura posee dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichos ejes es un centro de simetría (figura 5.6b).

La determinación de los centroides de áreas asimétricas y de líneas y áreas que poseen un solo eje de simetría se estudiará en las secciones 5.6 y 5.7. En las figuras 5.8A y 5.8B se muestran los centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

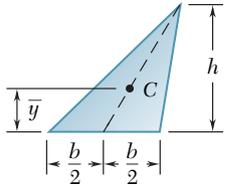
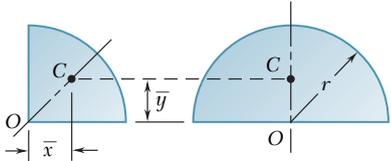
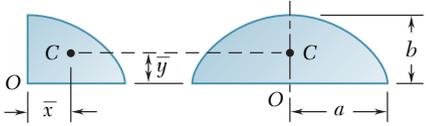
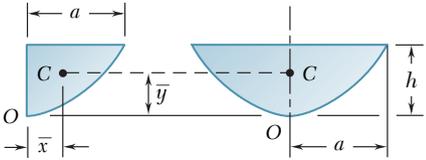
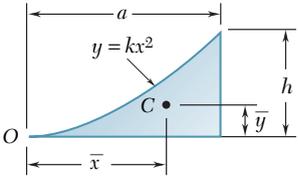
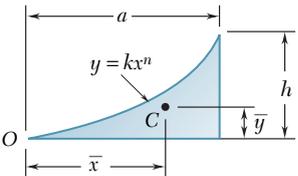
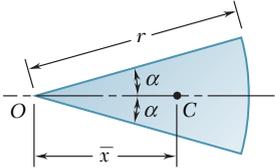
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	$\alpha r^2$

Figura 5.8A Centroides de áreas comunes.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi r$
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

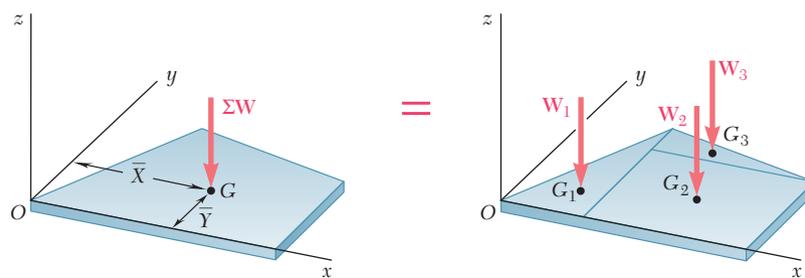
Figura 5.8B Centroides de formas comunes de líneas.

### 5.5. PLACAS Y ALAMBRES COMPUESTOS

En muchos casos, una placa plana puede dividirse en rectángulos, triángulos u otras de las formas comunes mostradas en la figura 5.8A. La abscisa  $\bar{X}$  de su centro de gravedad  $G$  puede determinarse a partir de las abscisas  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  de los centros de gravedad de las diferentes partes que constituyen la placa, expresando que el momento del peso de toda la placa con respecto al eje  $y$  es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto a ese mismo eje (figura 5.9). La ordenada  $\bar{Y}$  del centro de gravedad de la placa se encuentra de una forma similar, igualando momentos con respecto al eje  $x$ . Así, se escribe

$$\Sigma M_y: \bar{X}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n$$

$$\Sigma M_x: \bar{Y}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n$$



$$\Sigma M_y: \bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

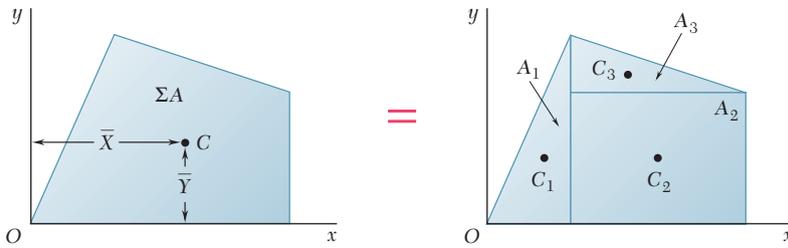
$$\Sigma M_x: \bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figura 5.9 Centro de gravedad de una placa compuesta.

o en forma condensada,

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad (5.7)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para las coordenadas  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  del centro de gravedad de la placa.



$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$$

$$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$$

Figura 5.10 Centroide de un área compuesta.

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centro de gravedad coincide con el centroide  $C$  de su área. La abscisa  $\bar{X}$  del centroide del área puede determinarse observando que el primer momento  $Q_y$  del área compuesta con respecto al eje  $y$  puede expresarse como el producto de  $\bar{X}$  con el área total y como la suma de los primeros momentos de las áreas elementales con respecto al eje  $y$  (figura 5.10). La ordenada  $\bar{Y}$  del centroide se encuentra de forma similar, considerando el primer momento  $Q_x$  del área compuesta. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1A_1 + \bar{x}_2A_2 + \dots + \bar{x}_nA_n$$

$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2 + \dots + \bar{y}_nA_n$$

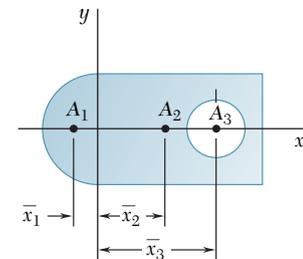
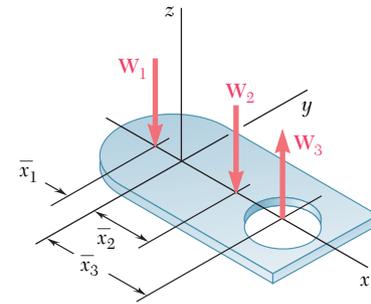
o en forma condensada,

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \quad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad (5.8)$$

Estas ecuaciones proporcionan los primeros momentos del área compuesta o pueden utilizarse para obtener las coordenadas  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  de su centroide.

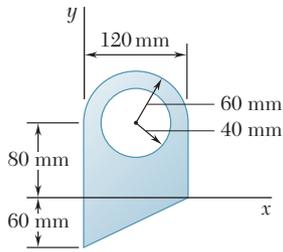
Se debe tener cuidado de asignarle el signo apropiado al momento de cada área. Los primeros momentos de áreas, al igual que los momentos de las fuerzas, pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, un área cuyo centroide está localizado a la izquierda del eje  $y$  tendrá un primer momento negativo con respecto a dicho eje. Además al área de un agujero se le debe asignar un signo negativo (figura 5.11).

De manera similar, en muchos casos es posible determinar el centro de gravedad de un alambre compuesto o el centroide de una línea compuesta dividiendo al alambre o a la línea en elementos más simples (véase problema resuelto 5.2).



	$\bar{x}$	$A$	$\bar{x}A$
$A_1$ Semicírculo	-	+	-
$A_2$ Rectángulo completo	+	+	+
$A_3$ Agujero circular	+	-	-

Figura 5.11

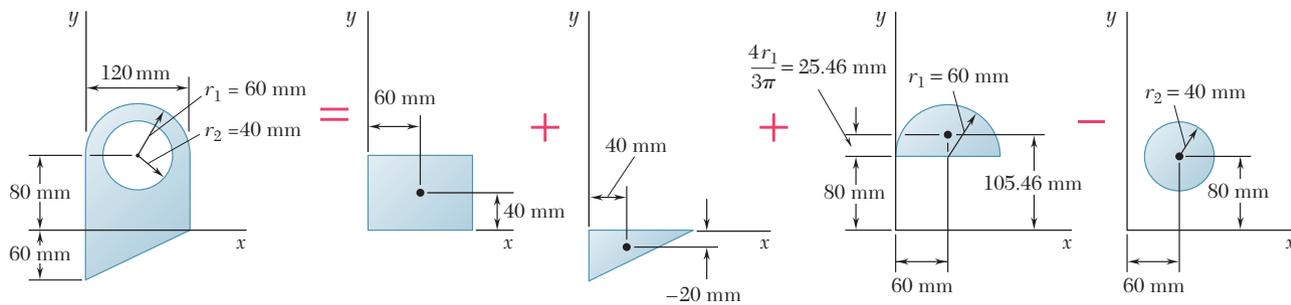


## PROBLEMA RESUELTO 5.1

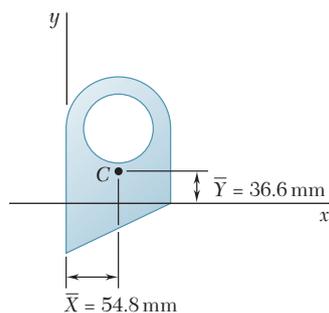
Para el área plana mostrada en la figura, determine: a) los primeros momentos con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  y b) la ubicación de su centroide.

## SOLUCIÓN

**Componentes del área.** El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes y luego se introducen en la tabla que parece en la parte inferior. El área del círculo se indica como negativa puesto que debe restarse de las demás áreas. Nótese que la coordenada  $\bar{y}$  del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



Componente	$A, \text{mm}^2$	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	$-72 \times 10^3$
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	$-301.6 \times 10^3$	$-402.2 \times 10^3$
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$



a) **Primeros momentos del área.** Con las ecuaciones (5.8) se escribe

$$Q_x = \Sigma \bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

$$Q_y = \Sigma \bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

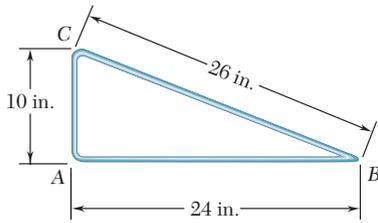
b) **Ubicación del centroide.** Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \quad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A: \quad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

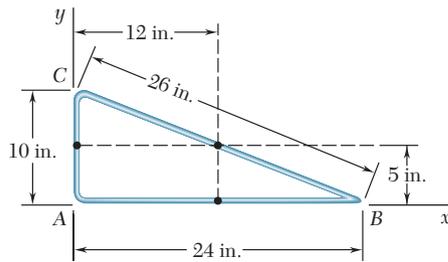


## PROBLEMA RESUELTO 5.2

La figura mostrada está hecha a partir de un pedazo de alambre delgado y homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.

## SOLUCIÓN

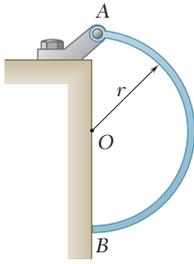
Como la figura está hecha de un alambre homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de la línea correspondiente. Por tanto, se determinará dicho centroide. Si se seleccionan los ejes mostrados, con origen en  $A$ , se determinan las coordenadas del centroide de cada segmento de línea y se calculan los primeros momentos con respecto a los ejes coordenados.



Segmento	$L$ , in.	$\bar{x}$ , in.	$\bar{y}$ , in.	$\bar{x}L$ , in <sup>2</sup>	$\bar{y}L$ , in <sup>2</sup>
$AB$	24	12	0	288	0
$BC$	26	12	5	312	130
$CA$	10	0	5	0	50
	$\Sigma L = 60$			$\Sigma \bar{x}L = 600$	$\Sigma \bar{y}L = 180$

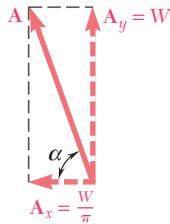
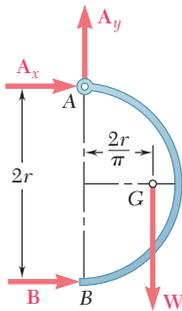
Con la sustitución de los valores obtenidos en la tabla, en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{X}\Sigma L &= \Sigma \bar{x}L: & \bar{X}(60 \text{ in.}) &= 600 \text{ in}^2 & \bar{X} &= 10 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Y}\Sigma L &= \Sigma \bar{y}L: & \bar{Y}(60 \text{ in.}) &= 180 \text{ in}^2 & \bar{Y} &= 3 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



### PROBLEMA RESUELTO 5.3

Una barra semicircular uniforme de peso  $W$  y radio  $r$  está unida a un perno en  $A$  y descansa contra una superficie sin fricción en  $B$ . Determine las reacciones en  $A$  y  $B$



### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la barra. Las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso  $W$ , el cual está aplicado en el centro de gravedad  $G$  (cuya posición se obtiene a partir de la figura 5.8B); una reacción en  $A$ , representada por sus componentes  $A_x$  y  $A_y$  y una reacción horizontal en  $B$ .

#### Ecuaciones de equilibrio

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = + \frac{W}{\pi} \quad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \text{ y } \blacktriangleleft$$

$$\dot{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \quad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \text{ z}$$

$$+\times \Sigma F_y = 0: \quad A_y - W = 0 \quad \mathbf{A}_y = W$$

Sumando las dos componentes de la reacción en  $A$ :

$$A = \left[ W^2 + \left( \frac{W}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \mathbf{A} = W \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} \right)^{1/2} \blacktriangleleft$$

$$\tan \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \quad \alpha = \tan^{-1} \pi \blacktriangleleft$$

Las respuestas también pueden expresarse como sigue:

$$\mathbf{A} = 1.049W \text{ b } 72.3^\circ \quad \mathbf{B} = 0.318W \text{ y } \blacktriangleleft$$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se desarrollaron las ecuaciones generales para localizar los centros de gravedad de cuerpos bidimensionales y alambres [ecuaciones (5.2)] y los centroides de áreas planas [ecuaciones (5.3)] y de líneas [ecuaciones (5.4)]. En los problemas que se presentan a continuación, se deberán localizar los centroides de áreas compuestas y líneas o tendrán que determinarse los primeros momentos del área de placas compuestas [ecuaciones (5.8)].

**1. Localización de centroides de áreas compuestas y líneas.** Los problemas resueltos 5.1 y 5.2 ilustran el procedimiento que debe seguirse al resolver problemas de este tipo. Sin embargo, hay ciertos puntos que se deben enfatizar.

**a)** El primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área o la línea dada, a partir de las formas comunes de la figura 5.8. Se debe reconocer que, en el caso de áreas planas, una forma en particular se puede construir de varias maneras. Además, mostrar las diferentes componentes (como se hace en el problema resuelto 5.1) ayudará a establecer correctamente sus centroides y sus áreas o longitudes. No debe olvidarse que, para obtener la forma deseada, es posible restar o sumar áreas.

**b)** Se recomienda que para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas o las longitudes y las coordenadas respectivas de sus centroides. Es esencial recordar que las áreas que son “removidas” (por ejemplo los agujeros) se toman como negativas. Además se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Por tanto, siempre debe observarse la ubicación del origen de los ejes coordenados.

**c)** Cuando sea posible, se deben utilizar consideraciones de simetría [sección 5.4] para determinar con mayor facilidad la ubicación de un centroide.

**d)** En las fórmulas de la figura 5.8 para el sector circular y para el arco del círculo, el ángulo siempre debe ser expresado en radianes.

**2. Cálculo de los primeros momentos de un área.** Los procedimientos para ubicar el centroide de un área y para determinar los primeros momentos de un área son similares; sin embargo, para calcular estos últimos no es necesario determinar el área total. Además, como se señaló en la sección 5.4, se debe reconocer que el primer momento de un área con respecto a un eje centroidal es igual a cero.

**3. Resolución de problemas que involucran al centro de gravedad.** En los problemas que se presentan a continuación se considera que los cuerpos son homogéneos; por tanto, sus centros de gravedad coinciden con sus centroides. Además, cuando un cuerpo que está suspendido de un solo perno está en equilibrio, el perno y el centro de gravedad del cuerpo deben estar localizados sobre la misma línea vertical.

Pudiera parecer que muchos de los problemas en esta lección tienen poco que ver con el estudio de la mecánica. Sin embargo, ser capaz de localizar el centroide de formas compuestas será esencial en varios tópicos que se estudiarán más adelante.

# Problemas

5.1 a 5.8 Localice el centroide del área plana mostrado en cada figura.

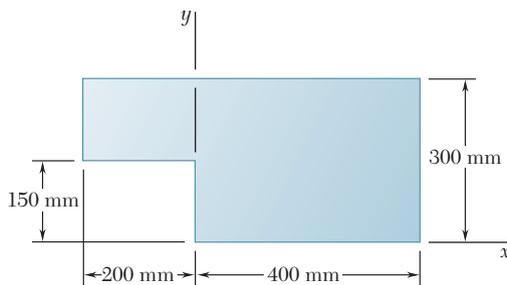


Figura P5.1

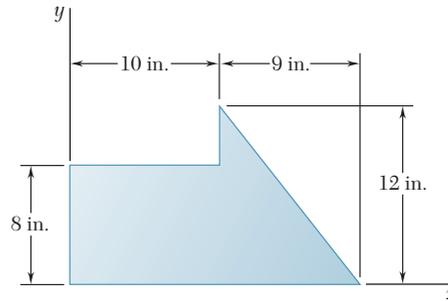


Figura P5.2

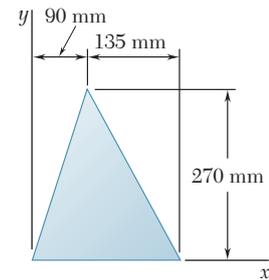


Figura P5.3

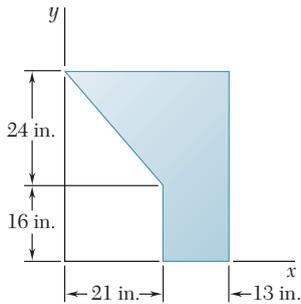


Figura P5.4

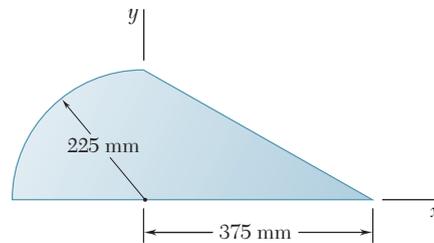


Figura P5.5

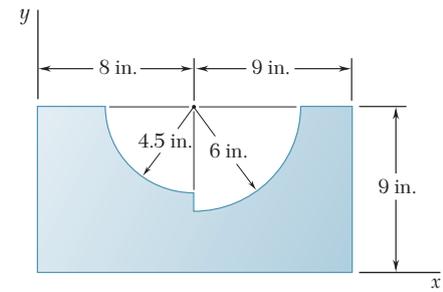


Figura P5.6

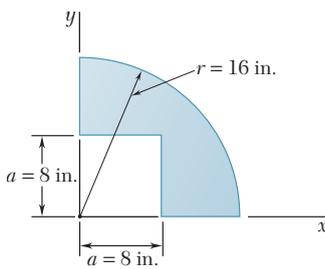


Figura P5.7

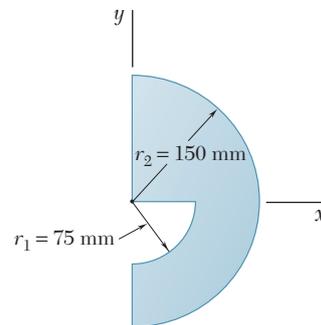


Figura P5.8

5.9 Para el área del problema 5.8, determine la relación  $r_2/r_1$  tal que  $\bar{x} = 4r_1/3$ .

**5.10** Para el área mostrada en la figura, demuestre que si  $r_1$  tiende a  $r_2$ , la localización de su centroide tiende a ser igual al centroide de un arco circular con radio  $(r_1 + r_2)/2$ .

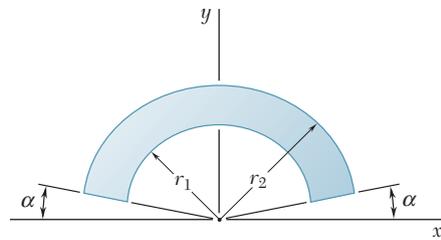


Figura P5.10

**5.11 a 5.16** Localice el centroide del área plana mostrada en cada figura.

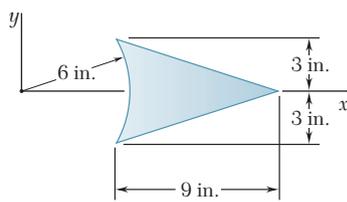


Figura P5.11

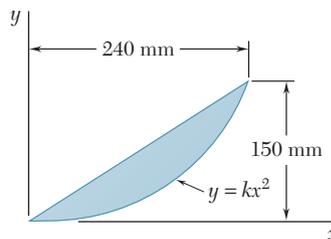


Figura P5.12

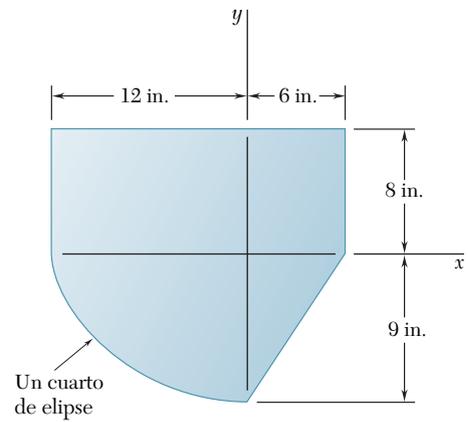


Figura P5.13

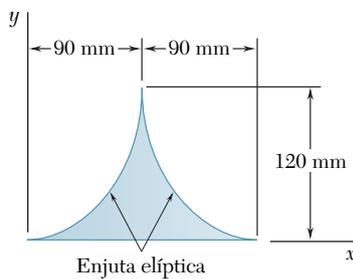


Figura P5.14

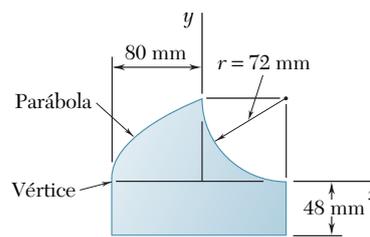


Figura P5.15

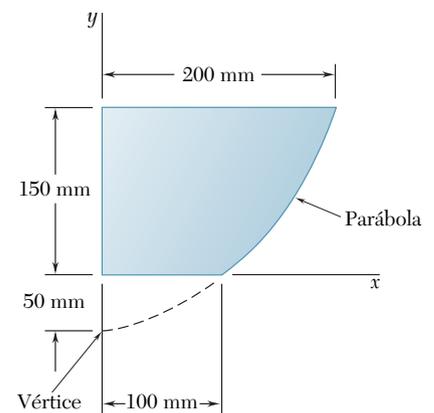


Figura P5.16

**5.17 y 5.18** El eje horizontal  $x$  se traza a través del centroide  $C$  y divide al área mostrada en dos áreas componentes  $A_1$  y  $A_2$ . Determine el primer momento de cada área componente respecto al eje  $y$  y explique los resultados obtenidos.

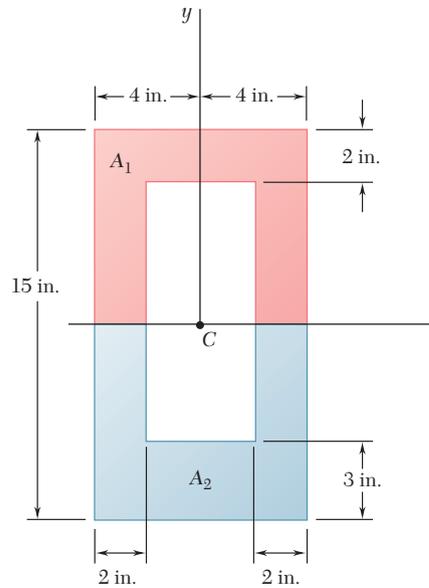


Figura P5.17

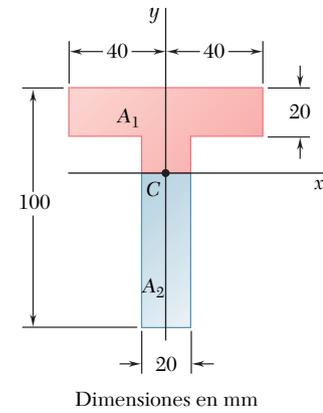


Figura P5.18

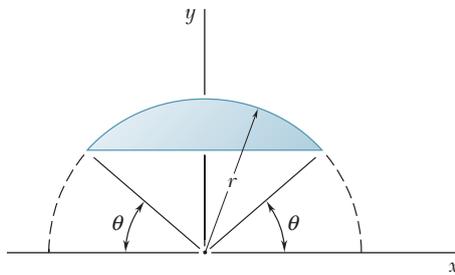


Figura P5.19

**5.19** El primer momento respecto al eje  $x$  del área sombreada que se muestra en la figura se representa mediante  $Q_x$ . a) Exprese  $Q_x$  en términos de  $r$  y  $\theta$ . b) Determine el valor de  $\theta$  para el cual  $Q_x$  es máximo y encuentre dicho valor máximo.

**5.20** Una viga compuesta se construye atornillando cuatro placas a cuatro ángulos de  $60 \times 60 \times 12$  mm, como indica la figura. Los tornillos están igualmente espaciados a lo largo de la viga, la cual sostiene una carga vertical. Tal como se demuestra en mecánica de materiales, las fuerzas cortantes ejercidas sobre los tornillos colocados en A y B son proporcionales a los primeros momentos respecto al eje centroidal  $x$  de las áreas sombreadas con rojo, respectivamente, en las partes a y b de la figura. Si la fuerza ejercida en el tornillo A es de 280 N, determine la fuerza ejercida sobre el tornillo B.

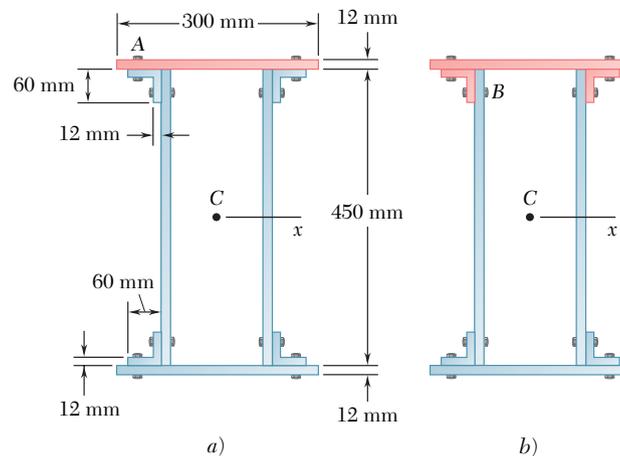


Figura P5.20

**5.21 a 5.24** Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de la figura que se indica en cada inciso. Localice el centro de gravedad de la figura formada con el alambre.

- 5.21 Fig. P5.1.
- 5.22 Fig. P5.2.
- 5.23 Fig. P5.5.
- 5.24 Fig. P5.8.

**5.25** Una barra uniforme de acero pesa 1.75 lb y se dobla para formar un arco de 20 in. de radio como el que muestra la figura. La barra se sostiene mediante un pasador puesto en A y la cuerda BC. Determine a) la tensión en la cuerda, b) la reacción en A.

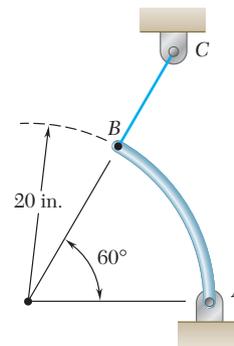


Figura P5.25

**5.26** El alambre homogéneo ABCD está doblado como indica la figura y se sostiene mediante un pasador puesto en B. Si  $l = 200$  mm, determine el ángulo  $\theta$  para el que el tramo BC del alambre se mantiene horizontal.

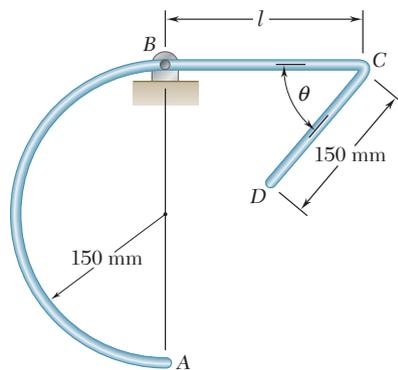


Figura P5.26 y P5.27

**5.27** El alambre homogéneo ABCD está doblado como indica la figura y se sostiene mediante un pasador instalado en B. Si  $\theta = 30^\circ$ , determine la longitud  $l$  para la cual el tramo CD del alambre se mantiene horizontal.

**5.28** Si la figura que se muestra está formada con un alambre homogéneo delgado, determine la longitud  $l$  del tramo CE del alambre para el cual el centro de gravedad de la figura se localiza en el punto C cuando a)  $\theta = 15^\circ$ , b)  $\theta = 60^\circ$ .

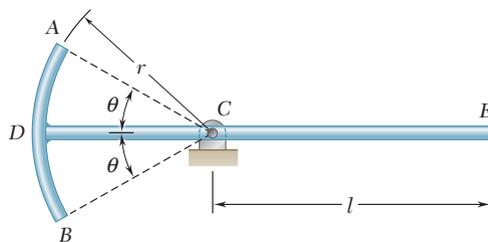


Figura P5.28

**5.29** Determine la distancia  $h$  tal que el centroide del área sombreada esté tan cerca como sea posible de la línea  $BB'$  cuando a)  $k = 0.2$ , b)  $k = 0.6$ .

**5.30** Si la distancia  $h$  es seleccionada para minimizar la distancia  $\bar{y}$  desde la línea  $BB'$  hasta el centroide del área sombreada que muestra la figura, demuestre que  $\bar{y} = h$ .

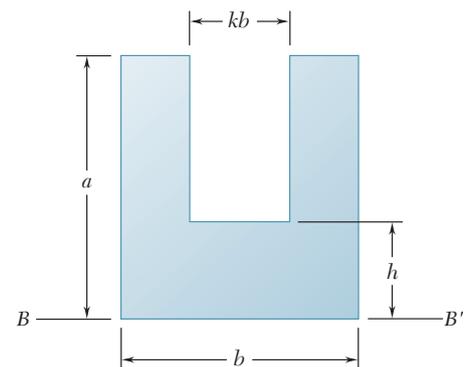


Figura P5.29 y P5.30

### 5.6. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un área limitada por curvas analíticas (esto es, curvas definidas por ecuaciones algebraicas) por lo general se determina evaluando las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.3) de la sección 5.3:

$$\bar{x}A = \int x \, dA \quad \bar{y}A = \int y \, dA \quad (5.3)$$

Si el elemento de área  $dA$  es un pequeño rectángulo de lados  $dx$  y  $dy$ , la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración doble* con respecto a  $x$  y  $y$ . También es necesaria una integración doble si se usan coordenadas polares para las cuales  $dA$  es un elemento de lados  $dr$  y  $r \, d\theta$ .

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar las coordenadas del centroide de un área con una sola integración. Esto se logra seleccionando a  $dA$  como un rectángulo o tira delgada o como un sector circular delgado (figura 5.12A); el centroide de un rectángulo delgado está localizado en su centro y el centroide de un sector delgado está localizado a una distancia de  $\frac{2}{3}r$  a partir de su vértice (como en el caso de un triángulo). Entonces, las coordenadas del centroide del área en consideración se obtienen expresando que el primer momento del área total con respecto a cada uno de los ejes coordenados es igual a la suma (o integral) de los momentos correspondientes de los elementos del área. Representando con  $\bar{x}_{el}$  y  $\bar{y}_{el}$  las coordenadas del centroide del elemento  $dA$ , se escribe

$$\begin{aligned} Q_y = \bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} \, dA \\ Q_x = \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} \, dA \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si el área  $A$  no se conoce aún, ésta también puede calcularse a partir de estos elementos.

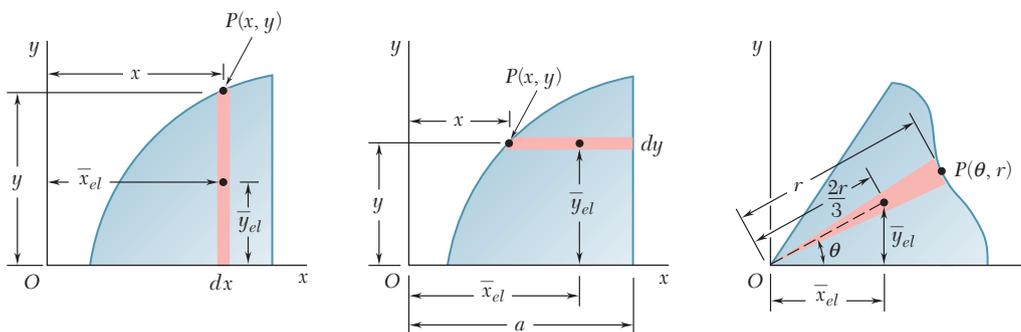


Figura 5.12A Centroides y áreas de elementos diferenciales.

Las coordenadas  $\bar{x}_{el}$  y  $\bar{y}_{el}$  del centroide del elemento del área  $dA$  deben expresarse en términos de las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Además, el área del elemento  $dA$  debe expresarse en términos de las coordenadas de dicho punto y de los diferenciales apropiados. Esto se ha hecho en la figura 5.12B para tres tipos comunes de elementos; la porción de círculo de la parte  $c$  debe utilizarse cuando la ecuación de la curva que limita al área esté dada en coordenadas polares. Deben sustituirse las expresiones apropiadas en las fórmulas (5.9) y debe utilizarse la

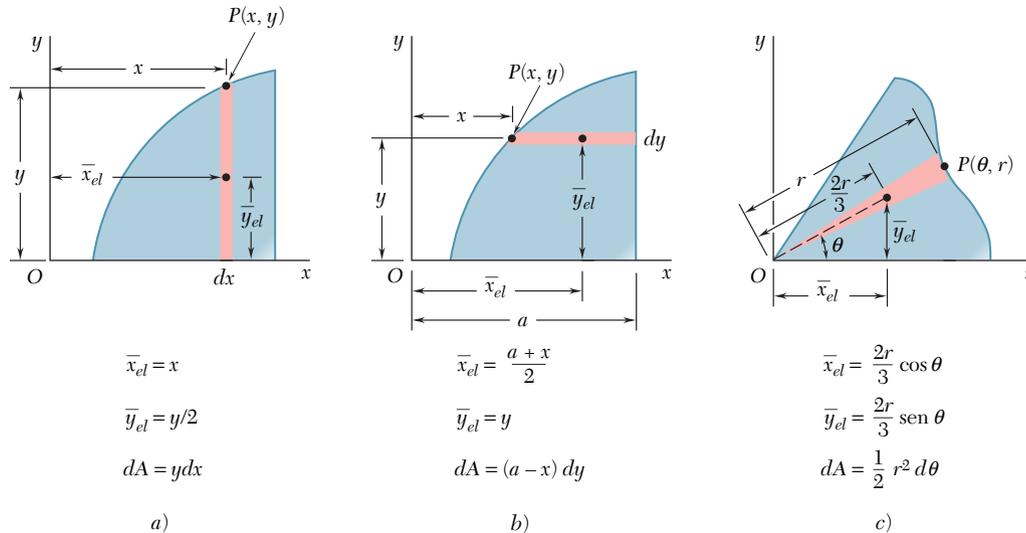


Figura 5.12B Centroides y áreas de elementos diferenciales.

ecuación de la curva que limita al área para expresar a una de las coordenadas en términos de la otra. De esta forma, se reduce a una sola integración. Una vez que se ha determinado el área y han sido evaluadas las integrales en las ecuaciones (5.9), estas ecuaciones pueden resolverse para las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del centroide del área.

Cuando una línea está definida por una ecuación algebraica, puede determinarse su centroide al evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.4) de la sección 5.3:

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

El diferencial de longitud  $dL$  debe reemplazarse por una de las siguientes expresiones, dependiendo de cuál coordenada  $x$ ,  $y$  o  $\theta$ , se seleccione como la variable independiente en la ecuación utilizada para definir la línea (estas expresiones pueden derivarse con el uso del teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dx$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Después de que se ha utilizado la ecuación de la línea para expresar una de las coordenadas en términos de la otra, se puede llevar a cabo la integración y se pueden resolver las ecuaciones (5.4) para las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del centroide de la línea.

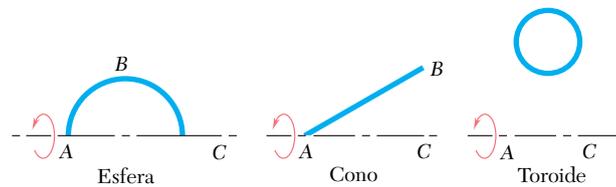
### 5.7. TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS

Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el siglo III después de Cristo y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577-1643), se refieren a superficies y cuerpos de revolución.

Una *superficie de revolución* se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo. Por ejemplo (figura 5.13), se

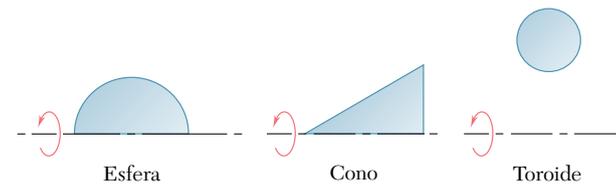


**Fotografía 5.2** Todos los tanques de almacenamiento que se muestran en la fotografía son cuerpos de revolución. Por tanto, las áreas de sus superficies y sus volúmenes pueden determinarse con los teoremas de Pappus-Guldinus.



**Figura 5.13**

puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semicircular  $ABC$  con respecto al diámetro  $AC$ ; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta  $AB$  con respecto a un eje  $AC$  y se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca a dicha circunferencia. Un *cuerpo de revolución* se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo. Como se muestra en la figura 5.14, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la forma apropiada con respecto al eje que se indica.



**Figura 5.14**

**TEOREMA I.** *El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.*

*Demostración.* Considérese un elemento  $dL$  de la línea  $L$  (figura 5.15) que rota alrededor del eje  $x$ . El área  $dA$  generada por el elemento  $dL$  es igual a  $2\pi y dL$ . Por tanto, el área total generada por  $L$  es  $A = \int 2\pi y dL$ . En la sección 5.3 se encontró que la integral  $\int y dL$  es igual

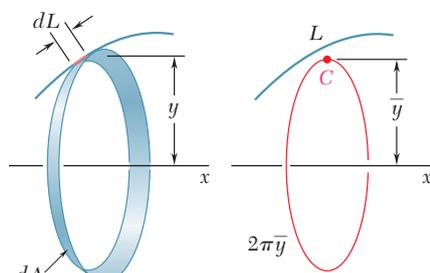


Figura 5.15

a  $\bar{y}L$ , por tanto, se tiene

$$A = 2\pi\bar{y}L \quad (5.10)$$

donde  $2\pi\bar{y}$  es la distancia recorrida por el centroide de  $L$  (figura 5.15). Se debe señalar que la curva generatriz no debe cruzar el eje sobre el cual rota; si lo hiciera, las dos secciones, una a cada lado del eje, generarían áreas que tendrían signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.

**TEOREMA II.** *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.*

*Demostración.* Considérese un elemento  $dA$  del área  $A$ , el cual se rota con respecto al eje  $x$  (figura 5.16). El volumen  $dV$  generado por

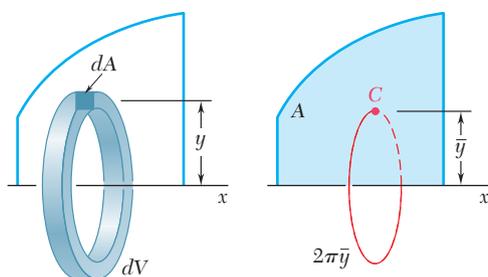


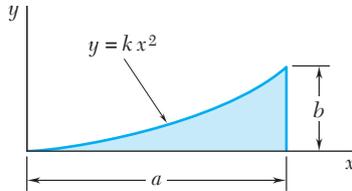
Figura 5.16

el elemento  $dA$  es igual a  $2\pi y dA$ . Por tanto, el volumen total generado por  $A$  es  $V = \int 2\pi y dA$  y, puesto que la integral  $\int y dA$  es igual  $\bar{y}A$  (sección 5.3), se tiene

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad (5.11)$$

donde  $2\pi\bar{y}$  es la distancia recorrida por el centroide de  $A$ . Es importante señalar que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación interseca al área generatriz.

Los teoremas de Pappus-Guldinus proporcionan una forma sencilla de calcular las áreas de superficies de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución. En forma inversa, estos teoremas se emplean para determinar el centroide de una curva plana cuando el área de la superficie generada por la curva es conocida o para determinar el centroide de un área plana cuando el volumen del cuerpo generado por el área es conocido (véase el problema resuelto 5.8).



### PROBLEMA RESUELTO 5.4

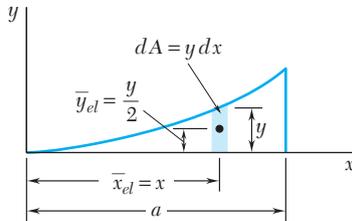
Determine por integración directa la localización del centroide de una enjuta parabólica.

### SOLUCIÓN

**Determinación de la constante  $k$ .** El valor de  $k$  se determina sustituyendo  $x = a$  y  $y = b$  en la ecuación dada. Se tiene  $b = ka^2$  o  $k = b/a^2$ . Por tanto la ecuación de la curva es

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \quad \text{o} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2}$$

**Elemento diferencial vertical.** Se selecciona el elemento diferencial mostrado y se determina el área total de la figura.



$$A = \int dA = \int y dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \left[ \frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al eje  $y$  es  $\bar{x}_{el} dA$ ; por tanto, el primer momento de toda el área con respecto a dicho eje es

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^a x \left( \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \left[ \frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

Como  $Q_y = \bar{x}A$ , se tiene que

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad \bar{x} \frac{ab}{3} = \frac{a^2 b}{4} \quad \bar{x} = \frac{3}{4}a \quad \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje  $x$  es  $\bar{y}_{el} dA$  y el primer momento de toda el área es

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 dx = \left[ \frac{b^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

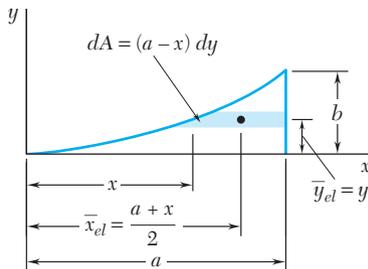
Since  $Q_x = \bar{y}A$ , we have

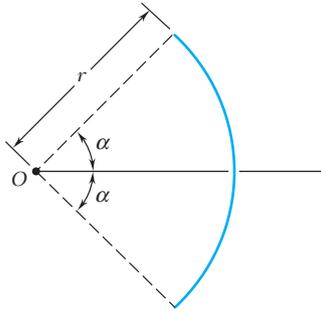
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad \bar{y} \frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{3}{10}b \quad \blacktriangleleft$$

**Elemento diferencial horizontal.** Se pueden obtener los mismos resultados considerando un elemento horizontal. Los primeros momentos del área son

$$\begin{aligned} Q_y &= \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left( a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \frac{a^2 b}{4} \\ Q_x &= \int \bar{y}_{el} dA = \int y(a-x) dy = \int y \left( a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy \\ &= \int_0^b \left( ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \frac{ab^2}{10} \end{aligned}$$

Para determinar  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , las expresiones obtenidas se sustituyen nuevamente en las ecuaciones que definen el centroide del área.





### PROBLEMA RESUELTO 5.5

Determine la ubicación del centroide del arco mostrado.

### SOLUCIÓN

Como el arco es simétrico con respecto al eje  $x$ ,  $\bar{y} = 0$ . Se selecciona un elemento diferencial, como se muestra en la figura, y se determina la longitud del arco por integración.

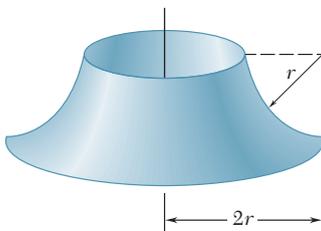
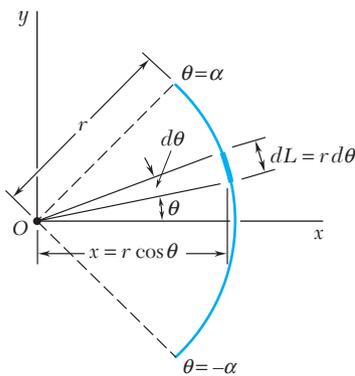
$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r \, d\theta = r \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

El primer momento del arco con respecto al eje  $y$  es

$$\begin{aligned} Q_y &= \int x \, dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta)(r \, d\theta) = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \, d\theta \\ &= r^2 [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

Como  $Q_y = \bar{x}L$ , se escribe

$$\bar{x}(2r\alpha) = 2r^2 \sin \alpha \quad \bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \blacktriangleleft$$



### PROBLEMA RESUELTO 5.6

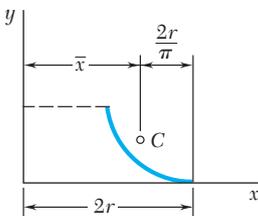
Determine el área de la superficie de revolución mostrada en la figura, la cual se obtiene rotando un cuarto de arco circular con respecto a un eje vertical.

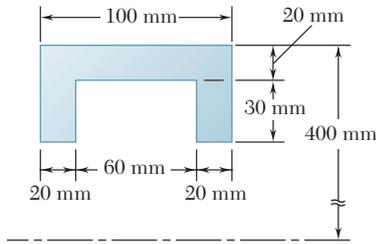
### SOLUCIÓN

De acuerdo con el teorema I de Pappus-Guldinus, el área generada es igual al producto de la longitud del arco y la distancia recorrida por su centroide. Refiriéndose a la figura 5.88, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \\ A &= 2\pi \bar{x}L = 2\pi \left[2r \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\right] \left(\frac{\pi r}{2}\right) \end{aligned}$$

$$A = 2\pi r^2 (\pi - 1) \quad \blacktriangleleft$$



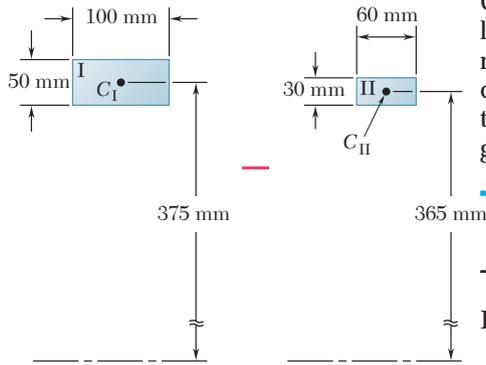


### PROBLEMA RESUELTO 5.7

El diámetro exterior de una polea es 0.8 m y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura. Se sabe que la polea está hecha de acero y que la densidad de dicho material es  $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , determine la masa y el peso de la corona.

### SOLUCIÓN

El volumen de la corona se puede encontrar con el teorema II de Pappus-Guldinus, el cual establece que el volumen es igual al producto del área de la sección transversal dada por la distancia recorrida por su centroide en una revolución completa. Sin embargo, el volumen se puede determinar más fácilmente si se observa que la sección transversal se puede transformar a partir del rectángulo I, cuya área es positiva y del rectángulo II, cuya área es negativa.



	Área, mm <sup>2</sup>	$\bar{y}$ , mm	Distancia viajada por C, mm	Volumen, mm <sup>3</sup>
I	+5 000	375	$2\pi(375) = 2\,356$	$(5\,000)(2\,356) = 11.78 \times 10^6$
II	-1 800	365	$2\pi(365) = 2\,293$	$(-1\,800)(2\,293) = -4.13 \times 10^6$
				Volumen de la corona = $7.65 \times 10^6$

Como  $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ , se tiene que  $1 \text{ mm}^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$ , y se obtiene  $V = 7.65 \times 10^6 \text{ mm}^3 = (7.65 \times 10^6)(10^{-9} \text{ m}^3) = 7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ .

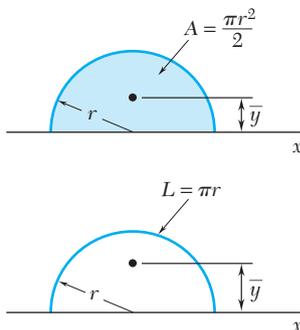
$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7.65 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \quad m = 60.0 \text{ kg} \quad \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad W = 589 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

### PROBLEMA RESUELTO 5.8

Con los teoremas de Pappus-Guldinus, determine: a) el centroide de un área semicircular y b) el centroide de un arco semicircular. Se debe recordar que el volumen y el área superficial de una esfera son, respectivamente,  $\frac{4}{3}\pi r^3$  y  $4\pi r^2$ .

### SOLUCIÓN



El volumen de una esfera es igual al producto del área de un semicírculo y la distancia recorrida por el centroide del semicírculo en una revolución alrededor del eje  $x$ .

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \quad \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el área superficial de una esfera es igual al producto de la longitud del semicírculo generatriz por la distancia recorrida por su centroide en una revolución.

$$A = 2\pi\bar{y}L \quad 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \quad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \quad \blacktriangleleft$$

## SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se usarán las ecuaciones

$$\bar{x}A = \int x \, dA \quad \bar{y}A = \int y \, dA \quad (5.3)$$

$$\bar{x}L = \int x \, dL \quad \bar{y}L = \int y \, dL \quad (5.4)$$

para localizar, respectivamente, los centroides de áreas y líneas planas. Además, se aplicarán los teoremas de Pappus-Guldinus (sección 5.7) para determinar las áreas de superficie de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución.

### 1. Determinación de los centroides de áreas y líneas por integración directa.

Cuando se resuelven problemas de este tipo, se debe seguir el método de solución mostrado en los problemas resueltos 5.4 y 5.5: calcular  $A$  o  $L$ , determinar los primeros momentos del área o de la línea y resolver las ecuaciones (5.3) o (5.4) para las coordenadas del centroide. Además, se debe poner atención especial en los siguientes puntos.

**a)** La solución se inicia con la definición o determinación cuidadosa de cada término en las integrales de las fórmulas aplicables. Es bastante recomendable mostrar en el esquema del área o de la línea dada la elección que se ha hecho para  $dA$  o para  $dL$  y las distancias a su centroide.

**b)** Como se explicó en la sección 5.6, la  $x$  y la  $y$  en las ecuaciones anteriores representan las *coordenadas del centroide* de los elementos diferenciales  $dA$  y  $dL$ . Es importante reconocer que las coordenadas del centroide de  $dA$  no son iguales a las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Se debe estudiar con detalle la figura 5.12 hasta que se comprenda en forma cabal este punto que es tan importante.

**c)** Para tratar de simplificar o minimizar los cálculos, siempre se debe examinar la forma del área o de la línea dada antes de definir el elemento diferencial que se utilizará. Por ejemplo, algunas veces es preferible utilizar elementos rectangulares que sean horizontales en lugar de verticales. Por lo general es mejor emplear coordenadas polares cuando una línea o un área tienen simetría circular.

**d)** A pesar de que la mayoría de las integraciones en esta lección son sencillas, en algunas ocasiones es posible que se tengan que utilizar técnicas más avanzadas como la sustitución trigonométrica o la integración por partes. Por supuesto, emplear una tabla de integrales es el método más rápido para evaluar integrales difíciles.

**2. Aplicación de los teoremas de Pappus-Guldinus.** Como se mostró en los problemas resueltos 5.6 al 5.8, estos teoremas, que son simples pero muy útiles, permiten aplicar el conocimiento sobre centroides para el cálculo de áreas y volúmenes. A pesar de que los teoremas hacen referencia a la distancia recorrida por el centroide y a la longitud de la curva generatriz o del área generatriz, las ecuaciones resultantes [ecuaciones (5.10) y (5.11)] contienen los productos de estas cantidades, los cuales son simplemente los primeros momentos de una línea ( $\bar{y}L$ ) y de un área ( $\bar{y}A$ ), respectivamente. Por tanto, para aquellos problemas en los cuales la línea o el área generatriz consista de más de una forma común, sólo se necesita determinar  $\bar{y}L$  o  $\bar{y}A$ ; de esta manera, no se tiene que calcular la longitud de la curva generatriz o el área generatriz.

# Problemas

**5.31 a 5.33** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de  $a$  y  $h$ .

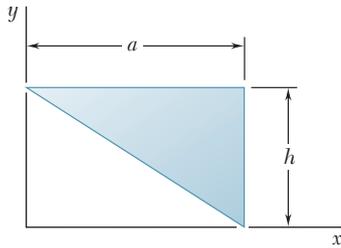


Figura P5.31

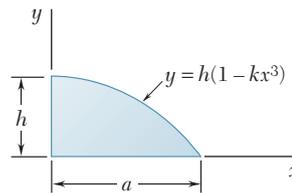


Figura P5.32

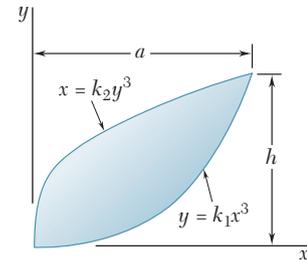


Figura P5.33

**5.34 a 5.36** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura.

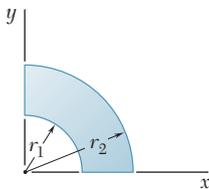


Figura P5.34

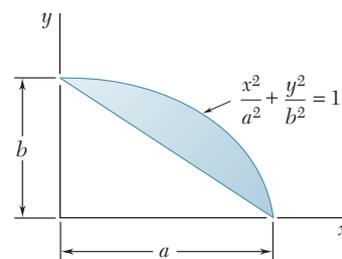


Figura P5.35

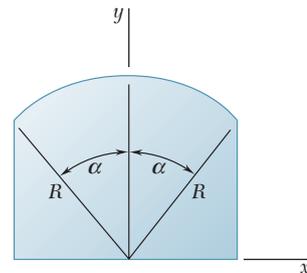


Figura P5.36

**5.37 y 5.38** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de  $a$  y  $b$ .

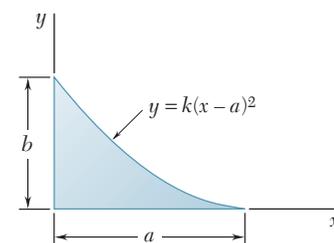


Figura P5.37

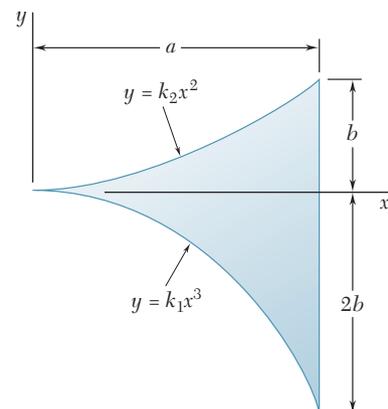


Figura P5.38

**5.39** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

**5.40 y 5.41** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura. Exprese la respuesta en términos de  $a$  y  $b$ .

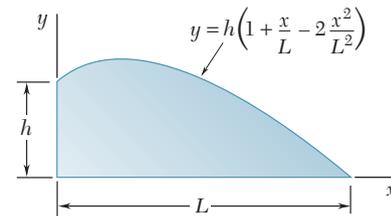


Figura P5.39

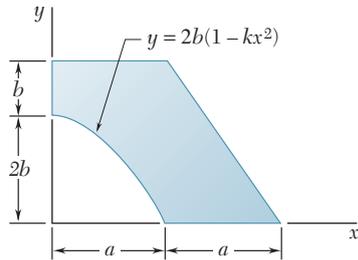


Figura P5.40

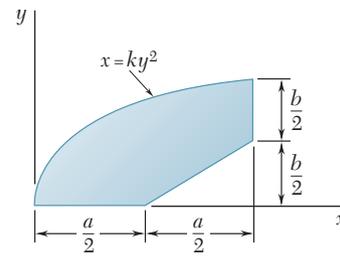


Figura P5.41

**5.42 y 5.43** Un alambre homogéneo se dobla en la forma indicada por la figura. Determine por integración directa la coordenada  $x$  de su centroide.

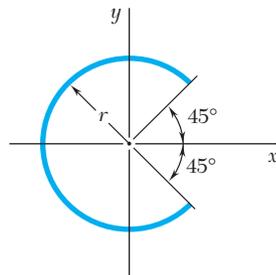


Figura P5.42

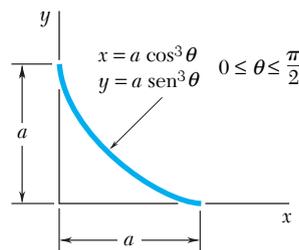


Figura P5.43

**\*5.44** Un alambre homogéneo se dobla en la forma indicada por la figura. Determine por integración directa la coordenada  $x$  de su centroide. Exprese la respuesta en términos de  $a$ .

**\*5.45 y \*5.46** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

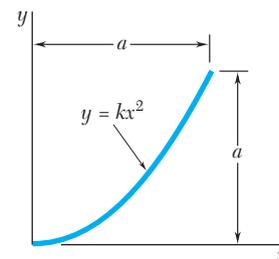


Figura P5.44

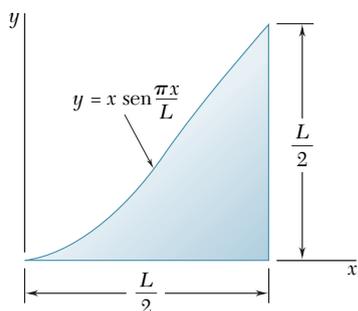


Figura P5.45

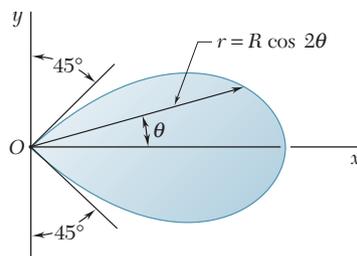


Figura P5.46

**246** Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad

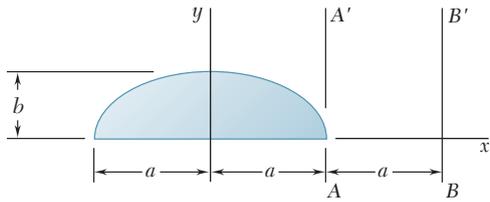


Figura P5.50

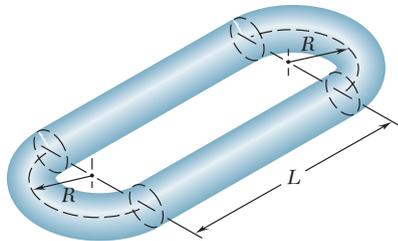


Figura P5.51

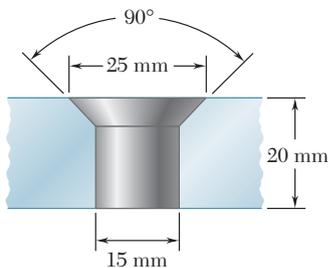


Figura P5.53

**5.47** Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.2 respecto a a) el eje  $x$ , b) la línea  $x = 19$  in.

**5.48** Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.4 respecto a a) el eje  $y$ , b) la línea  $y = 40$  in.

**5.49** Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.1 respecto a a) el eje  $x$ , b) la línea  $x = 400$  mm.

**5.50** Determine el volumen del sólido que se genera al rotar el área semi-elíptica mostrada en la figura respecto a a) el eje  $AA'$ , b) el eje  $BB'$ , c) el eje  $y$ .

**5.51** Si  $R = 0.75$  in. y  $L = 3$  in, determine el volumen y el área de la superficie del eslabón de cadena mostrado en la figura, el cual fue hecho a partir de una barra de 0.5 in. de diámetro.

**5.52** Verifique si las expresiones para los volúmenes de las primeras cuatro formas dadas en la figura 5.21 de la página 261 son correctas.

**5.53** Se taladra un agujero de 15 mm de diámetro en una pieza de acero de 20 mm de espesor, y después se avellana como indica la figura. Determine el volumen de acero removido durante el proceso de avellanado.

**5.54** Tres perfiles diferentes de bandas motrices se someten a un estudio. Si, en todo momento, las bandas hacen contacto con la mitad de la circunferencia de su polea, determine el *área de contacto* que hay entre la banda y la polea en cada diseño.

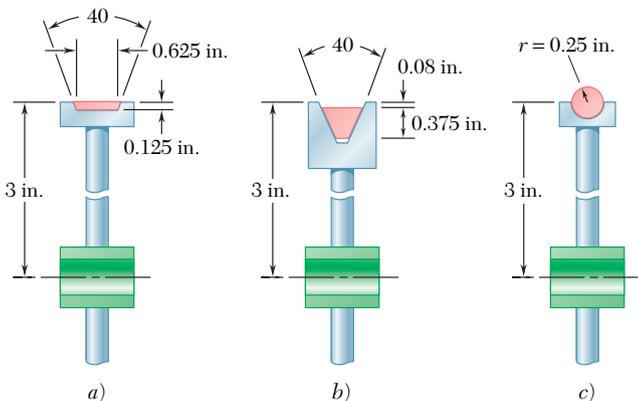


Figura P5.54

**5.55** Determine el volumen y el área de la superficie del cuerpo que se muestra en la figura.

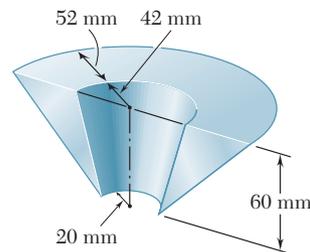


Figura P5.55

**5.56** El escudete (una placa decorativa colocada sobre la parte de tubería que sale de una pared) fue moldeado en latón como indica la figura. Si la densidad del latón es de  $8\,470\text{ kg/m}^3$ , determine la masa del escudete.

**5.57** La cubierta redondeada de una mesa de madera tiene el perfil que muestra la figura. Si el diámetro de la cubierta es de 44 in. antes de darle forma, y el peso específico de la madera es de  $0.025\text{ lb/in}^3$ , determine el peso del desperdicio que resulta de la producción de 5 000 cubiertas.

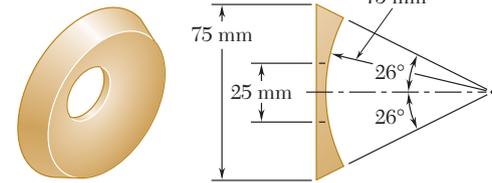


Figura P5.56

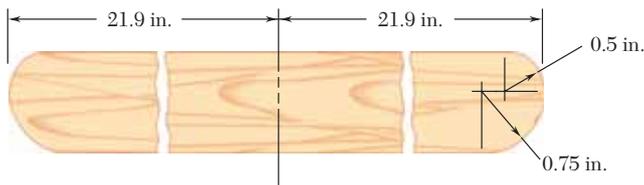


Figura P5.57 y P5.58

**5.58** La cubierta redondeada de una mesa de madera tiene la forma que muestra la figura. Si a cada cubierta se le aplican tres capas de laca y cada litro de laca cubre  $500\text{ ft}^2$  de material, determine la cantidad de galones de laca requeridos para darle este acabado a 5 000 cubiertas.

**5.59** El reflector de aluminio de una pequeña lámpara de alta intensidad tiene espesor uniforme de 1 mm. Si la densidad del aluminio es de  $2\,800\text{ kg/m}^3$ , determine la masa del reflector.

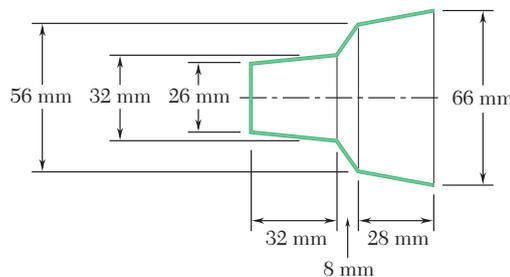
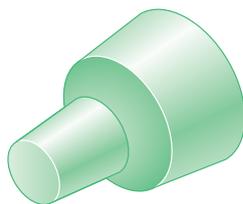


Figura P5.59

**\*5.60** El reflector de una pequeña linterna eléctrica tiene la forma parabólica que muestra la figura. Determine el área de la superficie interior del reflector.

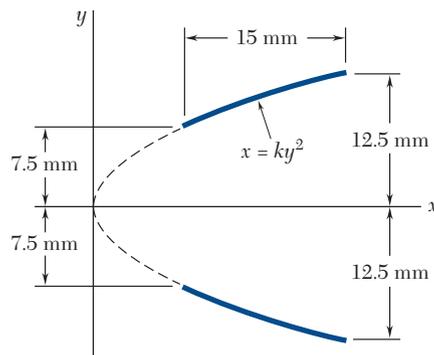


Figura P5.60

**\*5.8. CARGAS DISTRIBUIDAS EN VIGAS**

El concepto del centroide de un área puede utilizarse para resolver otros problemas distintos a los relacionados con los pesos de placas planas. Por ejemplo, considérese una viga que soporta una *carga distribuida*; esta carga puede estar constituida por el peso de los materiales soportados directa o indirectamente por la viga o puede ser ocasionada por el viento o por una presión hidrostática. La carga distribuida puede representarse al graficar la carga  $w$  soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lb/ft. La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de viga de longitud  $dx$  es  $dW = w dx$ , y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w dx$$

Se observa que el producto  $w dx$  es igual en magnitud al elemento de área  $dA$  mostrado en la figura 5.17a. Por tanto, la carga  $W$  es igual en magnitud al área total  $A$  bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Ahora se procede a determinar dónde debe aplicarse, sobre la viga, *una sola carga concentrada*  $\mathbf{W}$ , de la misma magnitud  $W$  que la carga distribuida total, si se deben producir las mismas reacciones en los apoyos (figura 5.17b). Sin embargo, debe aclararse que esta carga concentrada  $\mathbf{W}$ , la cual representa la resultante de la carga distribuida dada, es equivalente a esta última sólo cuando se considera el diagrama de cuerpo libre de toda la viga. El punto de aplicación  $P$  de la carga concentrada equivalente  $\mathbf{W}$  se obtiene expresando que el momento de  $\mathbf{W}$  con respecto a un punto  $O$  es igual a la suma de los momentos de las cargas elementales  $d\mathbf{W}$  con respecto a  $O$ :

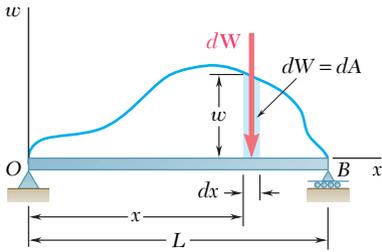
$$(OP)W = \int x dW$$

o, como  $dW = w dx = dA$  y  $W = A$ ,

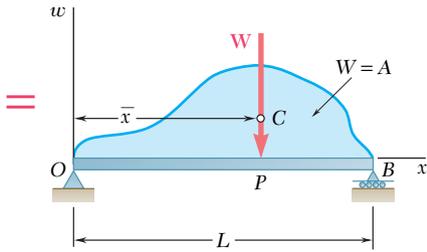
$$(OP)A = \int_0^L x dA \tag{5.12}$$

Puesto que la integral representa el primer momento con respecto al eje  $w$  del área bajo la curva de carga, ésta puede ser reemplazada por el producto  $\bar{x}A$ . Por tanto, se tiene que  $OP = \bar{x}$ , donde  $\bar{x}$  es la distancia desde el eje  $w$  hasta el centroide  $C$  del área  $A$  (nótese que dicho centroide *no* es el centroide de la viga).

*En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área.* Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.



a)



b)

Figura 5.17



**Fotografía 5.3** Los techos de las construcciones que se muestran en la fotografía pueden ser capaces de soportar no sólo el peso de la nieve, sino también las cargas distribuidas no simétricas causadas por el amontonamiento de la nieve.

El procedimiento usado en la sección anterior puede emplearse para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud  $L$  y un ancho  $b$ , donde  $b$  se mide perpendicular al plano de la figura. Como se señaló en la sección 5.8, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud  $dx$  es  $w dx$ , donde  $w$  es la carga por unidad de longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como  $p dA = pb dx$ , donde  $p$  es la presión manométrica en el líquido<sup>†</sup> y  $b$  es el ancho de la placa; por tanto,  $w = bp$ . Como la presión manométrica en un líquido es  $p = \gamma h$ , donde  $\gamma$  es el peso específico del líquido y  $h$  es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$w = bp = b\gamma h \quad (5.13)$$

lo cual demuestra que la carga por unidad de longitud  $w$  es proporcional a  $h$  y, por tanto, varía linealmente con  $x$ .

De acuerdo con los resultados de la sección 5.8, se observa que la resultante  $\mathbf{R}$  de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre un lado de la placa es igual en magnitud al área trapezoidal bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide  $C$  de dicha área. El punto  $P$  de la placa donde se aplica  $\mathbf{R}$  se conoce como el *centro de presión*.<sup>‡</sup>

A continuación se consideran las fuerzas ejercidas por un líquido sobre una superficie curva de ancho constante (figura 5.19a). Como la determinación por integración directa de la resultante  $\mathbf{R}$  de dichas fuerzas podría no ser fácil, se considera el cuerpo libre obtenido por la separación del volumen de líquido  $ABD$  el cual está limitado por la superficie curva  $AB$  y por las dos superficies planas  $AD$  y  $DB$  como se muestra en la figura 5.19b. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre  $ABD$  son el peso  $\mathbf{W}$  del volumen de líquido separado, la resultante  $\mathbf{R}_1$  de las fuerzas ejercidas sobre  $AD$ , la resultante  $\mathbf{R}_2$  de las fuerzas ejercidas sobre  $BD$  y la resultante  $-\mathbf{R}$  de las fuerzas ejercidas *por la superficie curva sobre el líquido*. La resultante  $-\mathbf{R}$  es igual y opuesta a  $\mathbf{R}$  y tiene la misma línea de acción que la resultante  $\mathbf{R}$  de las fuerzas ejercidas *por el líquido sobre la superficie curva*. Las fuerzas  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  se pueden determinar mediante los métodos convencionales; una vez que se han encontrado estos valores, la fuerza  $-\mathbf{R}$  se obtiene al resolver las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 5.19b. Entonces la resultante  $\mathbf{R}$  de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre la superficie curva se obtienen invirtiendo el sentido de  $-\mathbf{R}$ .

Los métodos presentados en esta sección pueden emplearse para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre las superficies de presas y de compuertas rectangulares y álabes. Las resultantes de las fuerzas que actúan sobre superficies sumergidas de ancho variable se determinarán en el capítulo 9.

<sup>†</sup>La presión  $p$ , la cual representa una carga por unidad de área, se expresa en  $\text{N/m}^2$  o en  $\text{lb/ft}^2$ . La unidad derivada del SI  $\text{N/m}^2$  recibe el nombre de *pascal* (Pa).

<sup>‡</sup>Observe que el área bajo la curva de carga es igual a  $w_E L$ , donde  $w_E$  es la carga por unidad de longitud en el centro  $E$  de la placa y de acuerdo con la ecuación (5.13), se puede escribir

$$R = w_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

donde  $A$  representa el área de la *placa*. Por tanto, se puede obtener la magnitud de  $\mathbf{R}$  si se multiplica el área de la placa por la presión en su centro  $E$ . Sin embargo, la resultante  $\mathbf{R}$  debe ser aplicada en  $P$ , no en  $E$ .

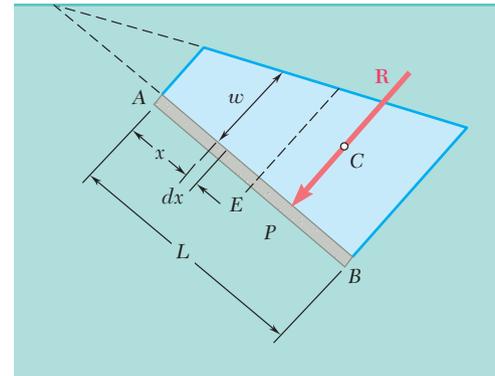
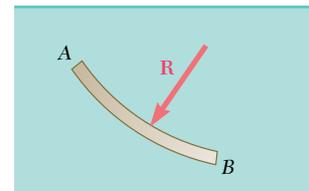
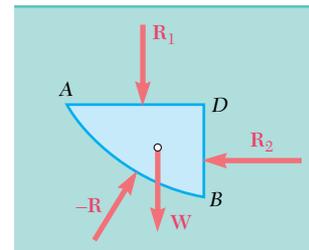


Figura 5.18



a)

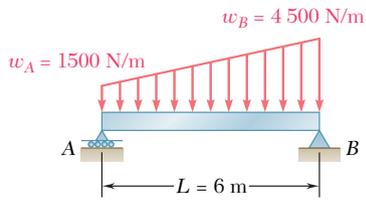


b)

Figura 5.19

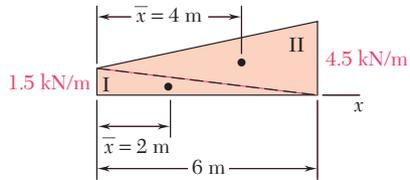


**Fotografía 5.4** Como se expuso en esta sección, la presa Grand Coulee soporta tres diferentes tipos de cargas distribuidas: los pesos de los elementos que la constituyen, las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre su cara sumergida y las fuerzas de presión ejercidas por el suelo sobre su base.



## PROBLEMA RESUELTO 5.9

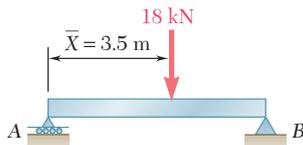
Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; a) determine la carga concentrada equivalente y b) determine las reacciones en los apoyos.



## SOLUCIÓN

**a) Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{x}$ , m	$\bar{x}A$ , kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$



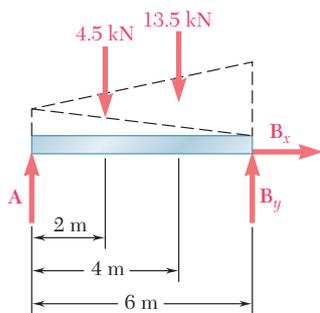
$$\text{Por lo tanto, } \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \quad \bar{X}(18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3.5 \text{ m}$$

La carga concentrada equivalente es

$$W = 18 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

$$\bar{X} = 3.5 \text{ m a la derecha de A} \quad \blacktriangleleft$$



**b) Reacciones.** La reacción en A es vertical y se representa con **A**; la reacción en B está representada por sus componentes **B<sub>x</sub>** y **B<sub>y</sub>**. Como se muestra en la figura, la carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$$\uparrow \Sigma F_x = 0: \quad \mathbf{B}_x = 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0: \quad -(4.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) = 0$$

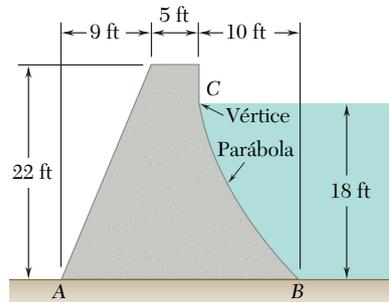
$$\mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \times \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma M_B = 0: \quad +(4.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0$$

$$\mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \times \quad \blacktriangleleft$$

**Solución alternativa.** La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte a. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma M_A = 0$  y  $\Sigma M_B = 0$ . De nuevo se obtiene

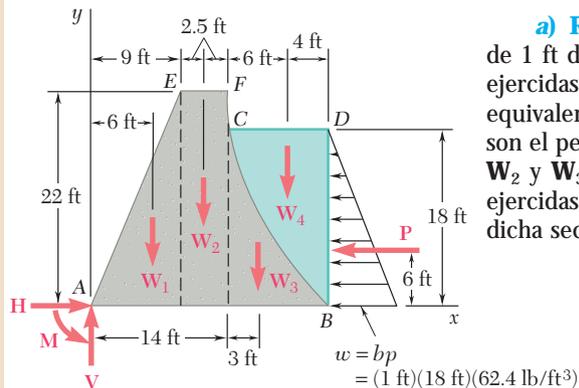
$$\mathbf{B}_x = 0 \quad \mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \times \quad \mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \times \quad \blacktriangleleft$$



## PROBLEMA RESUELTO 5.10

La sección transversal de una presa de concreto es como se muestra en la figura. Considere una sección de la presa de 1 ft de espesor y determine: a) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base  $AB$  de la presa y b) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara  $BC$  de la presa. Los pesos específicos del concreto y del agua son, respectivamente,  $150 \text{ lb/ft}^3$  y  $62.4 \text{ lb/ft}^3$ .

## SOLUCIÓN



a) **Reacción del suelo.** Se selecciona como cuerpo libre la sección de 1 ft de espesor  $AEFCD$  de la presa y el agua. Las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base  $AB$  están representadas por un sistema equivalente fuerza-par en  $A$ . Otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado con los pesos de sus componentes  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ ; el peso del agua  $W_4$  y la resultante  $P$  de las fuerzas de presión ejercidas sobre la sección  $BD$  por el agua que se encuentra a la derecha de dicha sección. Así se tiene

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2}(9 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 14\,850 \text{ lb} \\
 W_2 &= (5 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 16\,500 \text{ lb} \\
 W_3 &= \frac{1}{3}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 9\,000 \text{ lb} \\
 W_4 &= \frac{2}{3}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 7\,488 \text{ lb} \\
 P &= \frac{1}{2}(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(18 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 10\,109 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

### Ecuaciones de equilibrio

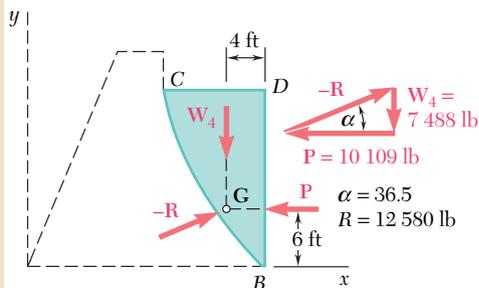
$$\uparrow \Sigma F_x = 0: \quad H - 10\,109 \text{ lb} = 0 \quad \mathbf{H = 10\,110 \text{ lb}} \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{aligned}
 +\times \Sigma F_y = 0: \quad V - 14\,850 \text{ lb} - 16\,500 \text{ lb} - 9\,000 \text{ lb} - 7\,488 \text{ lb} &= 0 \\
 \mathbf{V = 47\,840 \text{ lb}} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +| \Sigma M_A = 0: \quad &-(14\,850 \text{ lb})(6 \text{ ft}) - (16\,500 \text{ lb})(11.5 \text{ ft}) - (9\,000 \text{ lb})(17 \text{ ft}) \\
 &- (7\,488 \text{ lb})(20 \text{ ft}) + (10\,109 \text{ lb})(6 \text{ ft}) + M = 0 \\
 \mathbf{M = 520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft}} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Se puede reemplazar el sistema fuerza-par obtenido por una fuerza que actúa a una distancia  $d$  a la derecha de  $A$ , donde

$$d = \frac{520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft}}{47\,840 \text{ lb}} = 10.89 \text{ ft}$$



b) **Resultante  $R$  de las fuerzas ejercidas por el agua.** Se elige como cuerpo libre la sección parabólica de agua  $BCD$ . Las fuerzas involucradas son la resultante  $-R$  de las fuerzas ejercidas por la presa sobre el agua, el peso  $W_4$  y la fuerza  $P$ . Como estas fuerzas deben ser concurrentes,  $-R$  pasa a través del punto de intersección  $G$  de  $W_4$  y  $P$ . Se dibuja un triángulo de fuerzas a partir del cual se determinan la magnitud y la dirección de  $-R$ . La resultante  $R$  de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara  $BC$  es igual y opuesta:

$$\mathbf{R = 12\,580 \text{ lb} \angle 36.5^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Los problemas en esta lección involucran dos tipos de cargas comunes muy importantes: cargas distribuidas sobre vigas y fuerzas sobre superficies sumergidas de ancho constante. Como se estudió en las secciones 5.8 y 5.9 y se ilustró en los problemas resueltos 5.9 y 5.10, la determinación de la fuerza equivalente única para cada una de estas cargas requiere conocimiento sobre centroides.

**1. Análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas.** En la sección 5.8 se demostró que una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una fuerza equivalente. La magnitud de dicha fuerza es igual al área bajo la curva de la carga distribuida y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Por tanto, la solución debe comenzar reemplazando las diversas cargas distribuidas que actúan sobre una viga dada, por sus respectivas fuerzas equivalentes. Entonces, las reacciones en los apoyos de la viga pueden determinarse empleando los métodos del capítulo 4.

Cuando sea posible, las cargas distribuidas complejas deben dividirse en áreas que correspondan a las formas comunes mostradas en la figura 5.8A [problema resuelto 5.9]. Entonces, cada una de estas áreas se puede reemplazar por una sola fuerza equivalente. Si así se requiere, el sistema de fuerzas equivalentes puede reducirse aún más a una sola fuerza equivalente. A medida que se estudie el problema resuelto 5.9, observe cómo se ha utilizado la analogía entre fuerza y área y las técnicas para localizar el centroide de áreas compuestas para analizar una viga sujeta a una carga distribuida.

**2. Resolución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos sumergidos.** Se deben recordar los siguientes puntos y las siguientes técnicas al momento de resolver problemas de este tipo.

**a)** La presión  $p$  a una profundidad  $h$  por debajo de la superficie libre de un líquido es igual a  $\gamma h$  o  $\rho gh$ , donde  $\gamma$  y  $\rho$  son, respectivamente, el peso específico y la densidad del líquido. Por tanto, la carga por unidad de longitud  $w$  que actúa sobre una superficie sumergida de ancho constante  $b$  está dada por

$$w = bp = b\gamma h = b\rho gh$$

**b)** La línea de acción de la fuerza resultante  $\mathbf{R}$  que actúa sobre una superficie plana sumergida es perpendicular a dicha superficie.

**c)** Para una superficie rectangular plana vertical o inclinada de ancho  $b$ , la carga que actúa sobre la superficie puede representarse por medio de una carga linealmente distribuida que tiene forma trapezoidal (figura 5.18). Además, la magnitud de  $\mathbf{R}$  está dada por

$$R = \gamma h_E A$$

donde  $h_E$  es la distancia vertical al centro de la superficie y  $A$  es el área de la superficie.

d) En virtud de que la presión del líquido en la superficie libre del mismo es igual a cero, la curva de carga será triangular (en lugar de trapezoidal) cuando el borde superior de una superficie rectangular plana coincida con la superficie libre del líquido. Para este caso, la línea de acción de  $\mathbf{R}$  puede determinarse fácilmente debido a que pasa a través del centroide de una carga distribuida *triangular*.

e) Para el caso general, en lugar de analizar un trapezoide, se sugiere que se use el método señalado en la parte *b* del problema resuelto 5.9. Primero se divide a la carga distribuida trapezoidal en dos triángulos y, entonces, se calcula la magnitud de la resultante de cada carga triangular. (La magnitud es igual al producto del área del triángulo por el ancho de la placa.) Observe que la línea de acción de cada fuerza resultante pasa a través del centroide del triángulo correspondiente y que la suma de dichas fuerzas es equivalente a  $\mathbf{R}$ . Por tanto, en lugar de utilizar  $\mathbf{R}$ , se pueden usar las dos fuerzas resultantes equivalentes cuyos puntos de aplicación pueden determinarse fácilmente. Por supuesto, la ecuación dada para  $R$  en el párrafo *c* se debe utilizar cuando sólo se necesite conocer la magnitud de  $\mathbf{R}$ .

f) Cuando la superficie sumergida de ancho constante es curva, la fuerza resultante que actúa sobre la superficie se obtiene al considerar el equilibrio del volumen, del líquido, limitado por la superficie curva y por planos horizontales y verticales (figura 5.19). Obsérvese que la fuerza  $\mathbf{R}_1$  de la figura 5.19 es igual al peso del líquido que se encuentra por encima del plano *AD*. El método de solución para problemas que involucran superficies curvas se muestra en la parte *b* del problema resuelto 5.10.

En los cursos subsecuentes de mecánica (en particular el curso de mecánica de materiales y el curso de mecánica de fluidos) se tendrá una oportunidad amplia de utilizar las ideas presentadas en esta lección.

# Problemas

**5.61 y 5.62** Para la viga y las cargas mostradas en cada figura, determine a) magnitud y localización de la resultante de la carga distribuida, b) las reacciones en los apoyos de la viga.

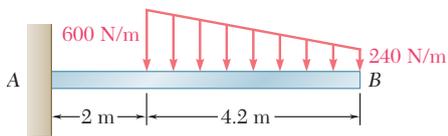


Figura P5.61

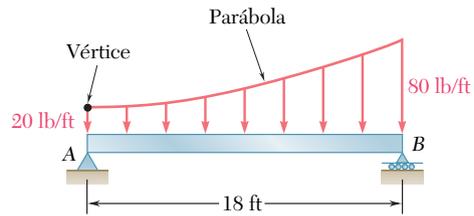


Figura P5.62

**5.63 a 5.68** Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de cada viga.

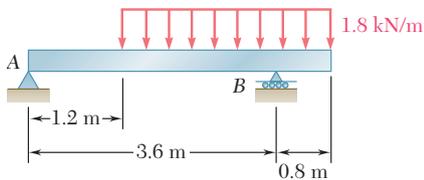


Figura P5.63

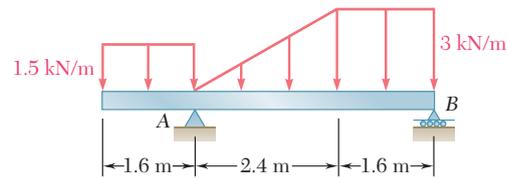


Figura P5.64

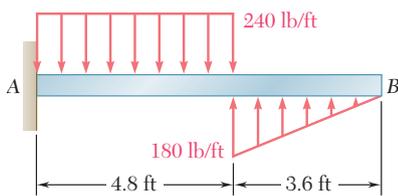


Figura P5.65

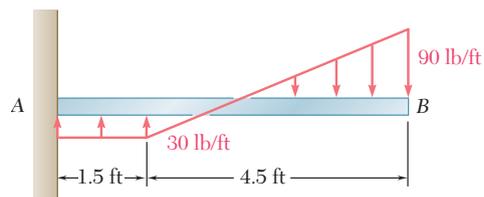


Figura P5.66

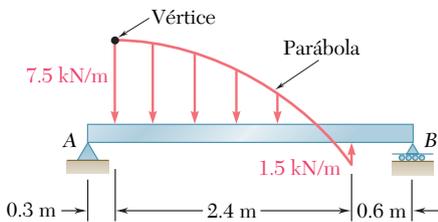


Figura P5.67

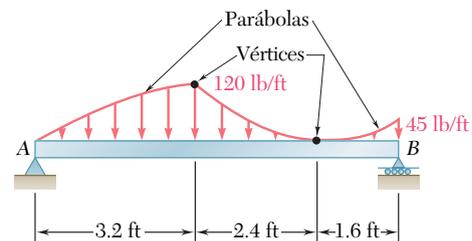


Figura P5.68

**5.69** Para la carga aplicada en la viga que se muestra en la figura, determine las reacciones en los apoyos, cuando  $w_0 = 1.5 \text{ kN/m}$ .

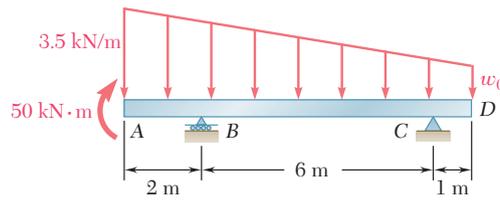


Figura P5.69 y P5.70

**5.70** Determine a) la carga distribuida  $w_0$  en el extremo D de la viga ABCD para la cual la reacción en B es cero, b) la reacción correspondiente en C.

**5.71** Si  $w = 300 \text{ N/m}$ , determine a) la distancia mínima  $a$  para la cual la reacción vertical en el apoyo B es igual a A, b) las reacciones correspondientes en los apoyos.

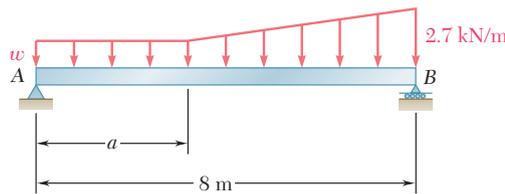


Figura P5.71 y P5.72

**5.72** Si  $w = 300 \text{ N/m}$ , determine a) la distancia  $a$  para la cual la razón de la reacción vertical en el apoyo B respecto a la reacción vertical en el soporte A es máxima, b) las reacciones correspondientes en los apoyos.

**5.73** Una viga de nivel AB soporta tres cargas concentradas y descansa sobre el suelo encima de una roca grande. El suelo ejerce una carga distribuida hacia arriba, y la roca ejerce una carga concentrada  $R_R$  como indica la figura. Si  $P = 1 \text{ kip}$  y  $w_B = \frac{1}{2} w_A$ , determine los valores de  $w_A$  y  $R_R$  correspondientes al estado de equilibrio.

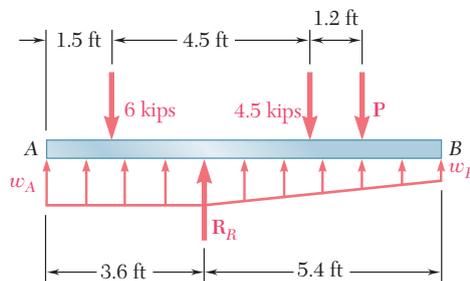


Figura P5.73 y P5.74

**5.74** Una viga de nivel AB soporta tres cargas concentradas y descansa sobre el suelo encima de una roca grande. El suelo ejerce una carga distribuida hacia arriba, y la roca ejerce una carga concentrada  $R_R$  como indica la figura. Si  $w_B = 0.4w_A$ , determine a) el valor máximo de  $P$  en el cual la viga está equilibrada, b) el valor correspondiente de  $w_A$ .

En los problemas siguientes, debe usarse  $\gamma = 62.4 \text{ lb/ft}^3$  para el peso específico del agua dulce  $\gamma_c = 150 \text{ lb/ft}^3$  para el peso específico del concreto cuando se utilicen las unidades del sistema inglés. Al emplear unidades SI, se debe utilizar  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  para la densidad del agua dulce y  $\rho_c = 2.40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  para la densidad del concreto. (Vea la nota al pie de la página 222 para saber cómo se determina el peso específico de un material a partir de su densidad.)

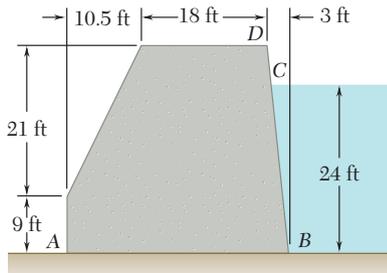


Figura P5.75

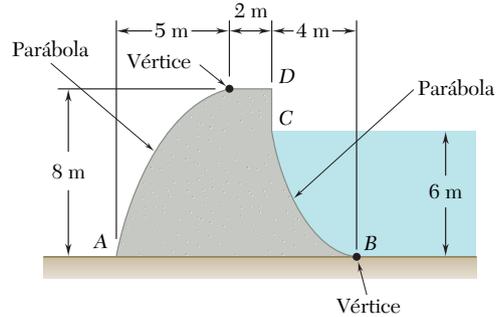


Figura P5.76

**5.75 y 5.76** La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de una unidad de ancho, determine a) las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base  $AB$  del dique, b) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso a), c) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara  $BD$  del dique.

**5.77** Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de  $225 \times 225 \text{ mm}$  pivoteada respecto a un eje horizontal a través de  $A$ , localizado a una distancia  $h = 90 \text{ mm}$  por encima del borde inferior. Determine la profundidad  $d$  del agua para la cual la válvula se abrirá.

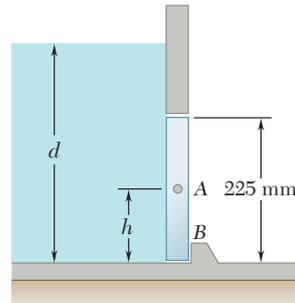


Figura P5.77 y P5.78

**5.78** Una válvula automática consiste en una placa cuadrada de  $225 \times 225 \text{ mm}$  pivoteada respecto a un eje horizontal a través de  $A$ . Si la válvula se abre cuando la profundidad del agua es  $d = 450 \text{ mm}$ , determine la distancia  $h$  desde la parte baja de la válvula hasta el pivote  $A$ .

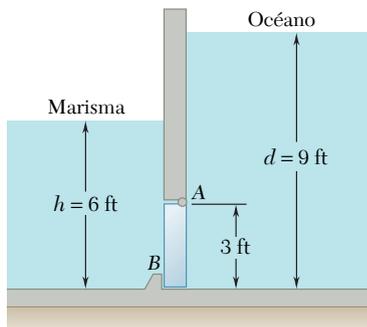


Figura P5.79

**5.79** Una marisma de agua dulce drena hacia el océano a través de una compuerta de marea automática que tiene 4 ft de ancho y 3 ft de alto. La compuerta se sostiene mediante bisagras ubicadas a lo largo de su borde superior en  $A$  y se apoya sobre un tope en  $B$ . En un momento determinado, los niveles de agua en la marisma y el océano son  $h = 6 \text{ ft}$  y  $d = 9 \text{ ft}$ , respectivamente. Determine la fuerza ejercida por el tope sobre la compuerta en  $B$  y la reacción de las bisagras en  $A$ . (El peso específico del agua salada es de  $64 \text{ lb/ft}^3$ .)

**5.80** El dique de un lago se diseña para soportar la fuerza adicional producida por el sedimento acumulado en el fondo del lago. Si la densidad del sedimento es equivalente a la de un líquido con densidad  $\rho_s = 1.76 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y considerando que el ancho del dique es de 1 m, determine el porcentaje de incremento en la fuerza que actúa sobre la cara del dique cuando se tiene una acumulación de sedimento de 1.5 m de profundidad.

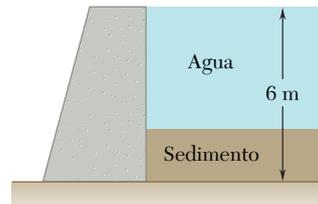


Figura P5.80 y P5.81

**5.81** La base del dique de un lago se diseña para soportar hasta el 150 por ciento de la fuerza horizontal ejercida por el agua. Después de su construcción, se descubrió que se está acumulando sedimento (el cual es equivalente a un líquido de densidad  $\rho_s = 1.76 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) en el fondo del lago a razón de 20 mm/año. Si el ancho del dique mide 1 m, determine el número de años que deben transcurrir para que el dique se vuelva inseguro.

**5.82** En un canal de agua dulce, de 1.5 m de ancho, se construye un dique temporal clavando dos tablas a los pilotes ubicados a los lados del canal y apuntalando una tercera tabla  $AB$  contra los pilotes y el piso del canal. Sin tomar en cuenta la fricción  $BC$ , determine a) la fuerza horizontal ejercida sobre la tabla  $AB$  por cada uno de los pilotes, b) la fuerza vertical que se ejerce sobre la superficie de la tabla  $AB$ , c) la reacción en  $B$ .

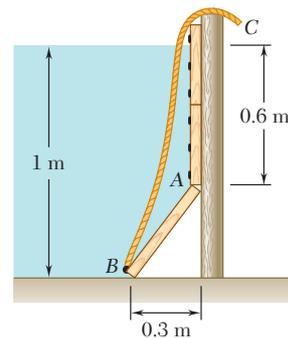


Figura P5.82 y P5.83

**5.83** En un canal de agua dulce, de 1.5 m de ancho, se construye un dique temporal clavando dos tablas a los pilotes ubicados a los lados del canal y apuntalando una tercera tabla  $AB$  contra los pilotes y el piso del canal. Sin tomar en cuenta la fricción, determine la magnitud y la dirección de la tensión mínima requerida en la cuerda  $BC$  para mover la tabla  $AB$ .

**5.84** La compuerta  $AB$  está situada al final del canal de agua de 6 ft de ancho y se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante bisagras instaladas a lo largo de su extremo superior  $A$ . Si el piso del canal no tiene fricción, determine las reacciones en  $A$  y  $B$ .

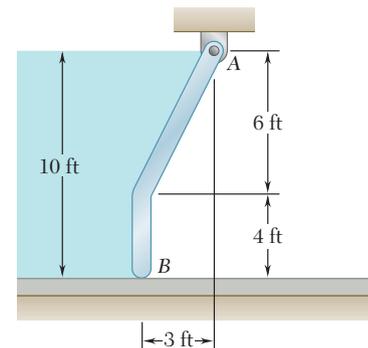


Figura P5.84

**258** Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad

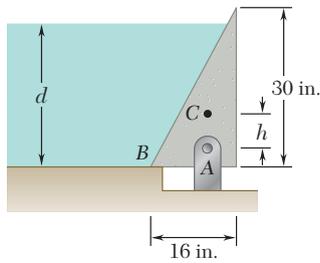


Figura P5.85 y P5.86

**5.85** Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma que está sostenida por medio de un pasador y una ménsula colocados en  $A$  y descansa sin fricción sobre un soporte ubicado en  $B$ . El pasador se localiza a una distancia de  $h = 4$  in. por abajo del centro de gravedad  $C$  de la compuerta. Determine la profundidad del agua  $d$  para la cual se abrirá la compuerta.

**5.86** Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma que está sostenida por medio de un pasador y una ménsula colocados en  $A$  y descansa sin fricción sobre un soporte puesto en  $B$ . Determine la distancia  $h$  si la compuerta debe abrirse cuando  $d = 30$  in..

**5.87** Una compuerta colocada en el extremo de un canal de agua dulce de 1 m de ancho fue fabricada con tres placas de acero rectangulares de 125 kg cada una. La compuerta está articulada en  $A$  y descansa sin fricción sobre un apoyo puesto en  $D$ . Si  $d = 0.75$  m, determine las reacciones en  $A$  y  $D$ .

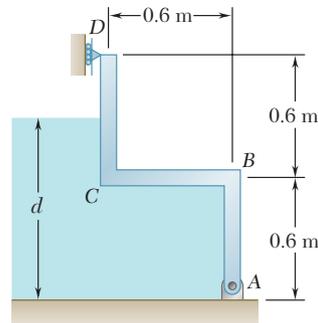


Figura P5.87 y P5.88

**5.88** Una compuerta colocada en el extremo de un canal de agua dulce de 1 m de ancho fue fabricada con tres placas de acero rectangulares de 125 kg cada una. La compuerta está articulada en  $A$  y descansa sin fricción sobre un apoyo colocado en  $D$ . Determine la profundidad  $d$  del agua para la cual se abrirá la compuerta.

**5.89** Un canalón para lluvia se sostiene del techo de una casa mediante ganchos espaciados 24 in. entre sí. Este canalón se obstruye y poco a poco se llena con agua de lluvia. Si el canalón está lleno de agua, determine a) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre una sección de 24 in. de la superficie curva del canalón que se muestra en la figura, b) el sistema fuerza-par ejercido sobre uno de los ganchos que sostienen al canalón.

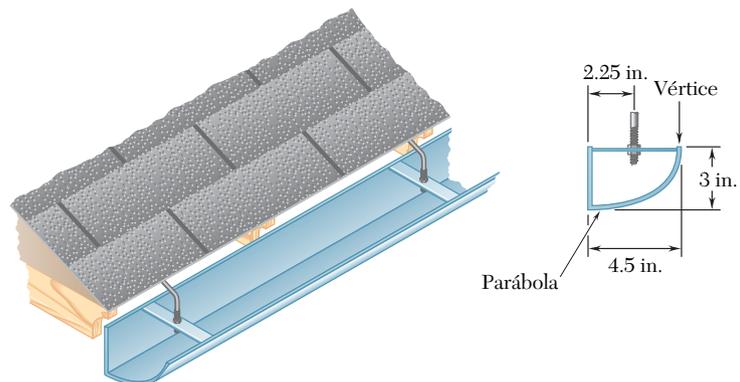


Figura P5.89

**5.10. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL. CENTROIDE DE UN VOLUMEN**

El *centro de gravedad*  $G$  de un cuerpo tridimensional se obtiene dividiendo el cuerpo en pequeños elementos y expresando que el peso  $\mathbf{W}$  del cuerpo actuando en  $G$  es equivalente al sistema de fuerzas distribuidas  $\Delta\mathbf{W}$  que representan a los pesos de los elementos pequeños. Al seleccionar al eje  $y$  vertical con un sentido positivo hacia arriba (figura 5.20) y representar con  $\bar{\mathbf{r}}$  al vector de posición de  $G$ , se escribe

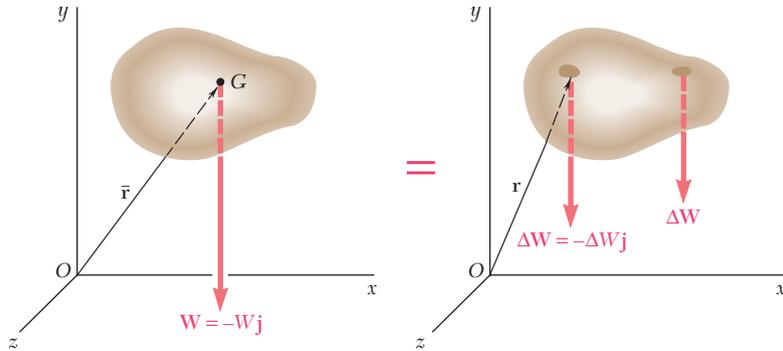


Figura 5.20



**Fotografía 5.5** Cuando el Boeing 747 fue modificado para transportar un *transbordador espacial*, fue necesario determinar el centro de gravedad de cada nave para predecir las características del vuelo.

que  $\mathbf{W}$  es igual a la suma de los pesos elementales  $\Delta\mathbf{W}$  y que su momento con respecto a  $O$  es igual a la suma de los momentos con respecto a  $O$  de los pesos elementales.

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}: & \quad -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma \mathbf{M}_O: & \quad \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Se reescribe la última ecuación de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma \mathbf{r} \Delta W) \times (-\mathbf{j}) \quad (5.14)$$

se observa que el peso  $\mathbf{W}$  del cuerpo es equivalente al sistema de pesos elementales  $\Delta\mathbf{W}$  si se cumplen las siguientes condiciones:

$$W = \Sigma \Delta W \quad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma \mathbf{r} \Delta W$$

Si se incrementa el número de elementos y al mismo tiempo se disminuye el tamaño de cada uno de ellos, se obtiene en el límite

$$W = \int dW \quad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r} dW \quad (5.15)$$

Se observa que las relaciones obtenidas son independientes de la orientación del cuerpo. Por ejemplo, si el cuerpo y los ejes coordenados fueran rotados de manera que el eje  $z$  apuntara hacia arriba, el vector unitario  $-\mathbf{j}$  sería reemplazado por  $-\mathbf{k}$  en las ecuaciones (5.13) y (5.14), pero las relaciones (5.15) permanecerían intactas. Descomponiendo los vectores  $\bar{\mathbf{r}}$  y  $\mathbf{r}$  en sus componentes rectangulares, se observa que la segunda de las relaciones (5.15) es equivalente a las tres ecuaciones escalares que se presentan a continuación

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW \quad (5.16)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo de peso específico  $\gamma$ , la magnitud  $dW$  del peso de un elemento infinitesimal se puede expresar en términos del volumen  $dV$  de dicho elemento y la magnitud  $W$  del peso total puede expresarse en términos del volumen total  $V$ . Así, se escribe

$$dW = \gamma dV \quad W = \gamma V$$

Sustituyendo a  $dW$  y a  $W$  en la segunda de las relaciones (5.15), se escribe

$$\bar{\mathbf{r}} V = \int \mathbf{r} dV \quad (5.17)$$

o, en forma escalar,

$$\bar{x} V = \int x dV \quad \bar{y} V = \int y dV \quad \bar{z} V = \int z dV \quad (5.18)$$

El punto cuyas coordenadas son  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  también se conoce como el *centroide  $C$  del volumen  $V$*  del cuerpo. Si el cuerpo no es homogéneo, las ecuaciones (5.18) no pueden utilizarse para determinar el centro de gravedad del mismo; sin embargo, las ecuaciones (5.18) aún definen al centroide de su volumen.

La integral  $\int x dV$  se conoce como el *primer momento del volumen con respecto al plano  $yz$* . De manera análoga, las integrales  $\int y dV$  y  $\int z dV$  definen, respectivamente, los primeros momentos del volumen con respecto al plano  $zx$  y al plano  $xy$ . A partir de las ecuaciones (5.18) se observa que si el centroide de un volumen está localizado en un plano coordenado, el primer momento del volumen con respecto a dicho plano es igual a cero.

Se dice que un volumen es simétrico con respecto a un plano dado si para cada punto  $P$  del volumen existe un punto  $P'$  del mismo volumen tal que la línea  $PP'$  es perpendicular al plano dado y está dividida en dos partes por dicho plano. Bajo estas circunstancias, se dice que el plano en cuestión es un *plano de simetría* para el volumen dado. Cuando un volumen  $V$  posee un plano de simetría, el primer momento de  $V$  con respecto a ese plano es igual a cero y el centroide del volumen está localizado en el plano de simetría. Cuando un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en la línea de intersección de los dos planos. Finalmente, cuando un volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un punto bien definido (esto es, que no se intersecan a lo largo de una línea común), el punto de intersección de los tres planos coincide con el centroide del volumen. Esta propiedad permite determinar la ubicación de los centroides de esferas, elipsoides, cubos y paralelepípedos rectangulares, entre otros.

Los centroides de volúmenes que no son simétricos o de volúmenes que tienen sólo uno o dos planos de simetría deben determinarse mediante integración (sección 5.12). Los centroides de varios volúmenes comunes se muestran en la figura 5.21. Se debe observar que, en general, el centroide de un volumen de revolución *no coincide* con el centroide de su sección transversal. Por tanto, el centroide de un hemisferio es diferente al de un área semicircular y el centroide de un cono es diferente al de un triángulo.

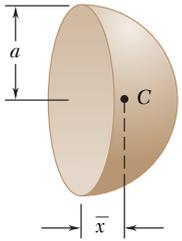
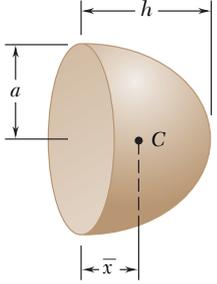
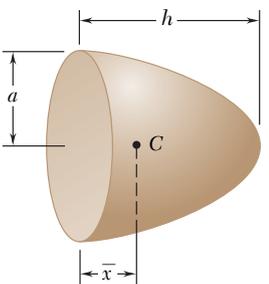
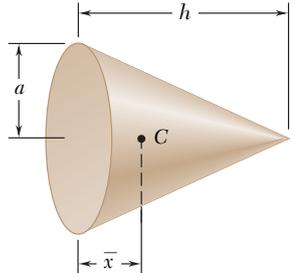
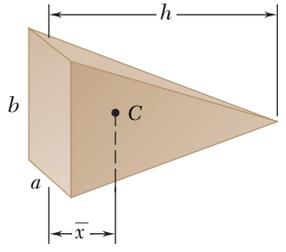
Forma		$\bar{x}$	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Figura 5.21 Centroides y volúmenes comunes.

5.11. CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo puede dividirse en varias de las formas comunes mostradas en la figura 5.21, su centro de gravedad  $G$  puede determinarse al expresar que el momento con respecto a  $O$  de su peso total es igual a la suma de los momentos con respecto a  $O$  de los pesos de las diferentes partes que lo componen. Si se procede de la misma forma que en la sección 5.10, se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las coordenadas  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  del centro de gravedad  $G$  de un cuerpo.

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \quad (5.19)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de su volumen y se obtiene:

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \quad (5.20)$$

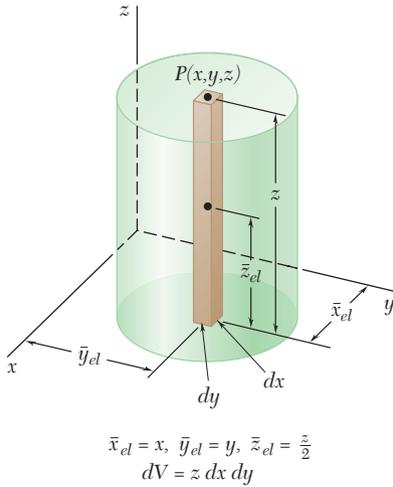


Figura 5.22 Determinación del centroide de un volumen por integración doble.

5.12. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE VOLÚMENES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un volumen limitado por superficies analíticas se puede determinar al evaluar las integrales dadas en la sección 5.10:

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.21)$$

Si el elemento de volumen  $dV$  se selecciona de manera que sea igual a un pequeño cubo de lados  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración triple*. Sin embargo, es posible determinar las coordenadas del centroide de la mayoría de los volúmenes utilizando *integración doble* si  $dV$  se selecciona de tal forma que sea igual al volumen de un filamento delgado (figura 5.22). Entonces, las coordenadas del centroide del volumen se obtienen rescribiendo las ecuaciones (5.21),

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV \quad (5.22)$$

y sustituyendo después las expresiones dadas en la figura 5.22 para el volumen  $dV$  y para las coordenadas  $\bar{x}_{el}$ ,  $\bar{y}_{el}$  y  $\bar{z}_{el}$ . Si se utiliza la ecuación de la superficie para expresar a  $z$  en términos de  $x$  y  $y$ , la integración se reduce a una integración doble en  $x$  y  $y$ .

Si el volumen en consideración posee *dos planos de simetría*, su centroide debe estar localizado sobre la línea de intersección de los dos planos. Seleccionando al eje  $x$  de manera que coincida con esta línea se tiene

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

y la única coordenada que se tiene que determinar es  $\bar{x}$ . Esto se puede realizar con una *sola integración* dividiendo el volumen dado en placas delgadas paralelas al plano  $yz$  y expresando a  $dV$  en términos de  $y$  y  $dx$  en la ecuación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad (5.23)$$

Para un cuerpo de revolución las placas son circulares y sus volúmenes se dan en la figura 5.23.

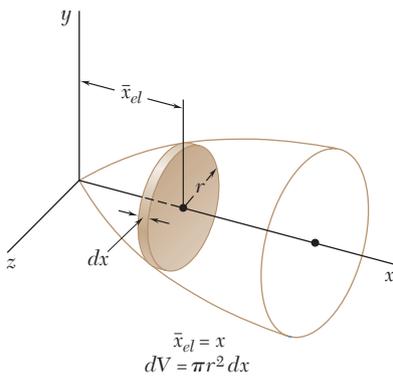
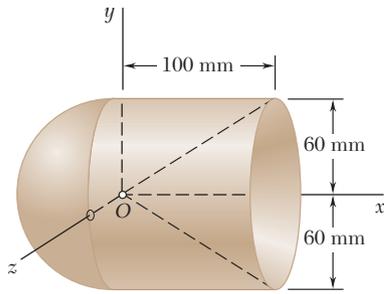


Figura 5.23 Determinación del centroide de un cuerpo de revolución.

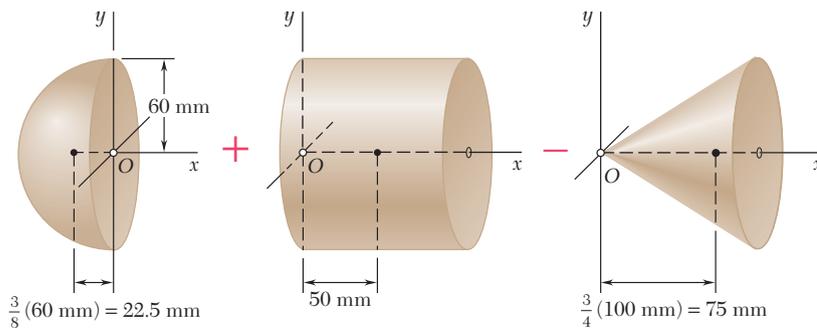


### PROBLEMA RESUELTO 5.11

Determine la ubicación del centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo que se muestra en la figura, el cual se obtuvo al unir una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.

### SOLUCIÓN

Debido a la simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre el eje  $x$ , como se muestra en la figura que se presenta a continuación. El cuerpo puede obtenerse sumándole una semiesfera a un cilindro y después restándole un cono. El volumen y la abscisa del centroide de cada una de estas componentes se obtiene a partir de la figura 5.21 y se introduce en la tabla que aparece a continuación. Entonces, se determinan el volumen total del cuerpo y el primer momento de dicho volumen con respecto al plano  $yz$ .

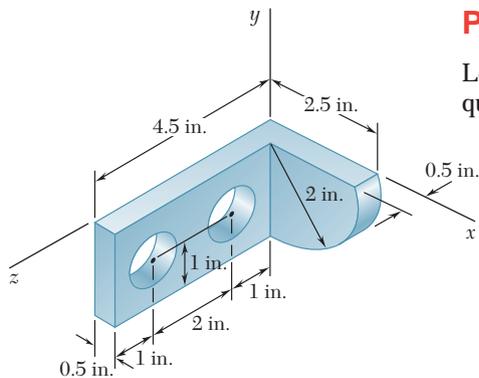


Componente	Volumen, $\text{mm}^3$	$\bar{x}$ , mm	$\bar{x}V$ , $\text{mm}^4$
Semiesfera	$\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} (60)^3 = 0.4524 \times 10^6$	-22.5	$-10.18 \times 10^6$
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = 1.1310 \times 10^6$	+50	$+56.55 \times 10^6$
Cono	$-\frac{\pi}{3} (60)^2(100) = -0.3770 \times 10^6$	+75	$-28.28 \times 10^6$
	$\Sigma V = 1.206 \times 10^6$		$\Sigma \bar{x}V = +18.09 \times 10^6$

Por tanto,

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \quad \bar{X}(1.206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = 18.09 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{X} = 15 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

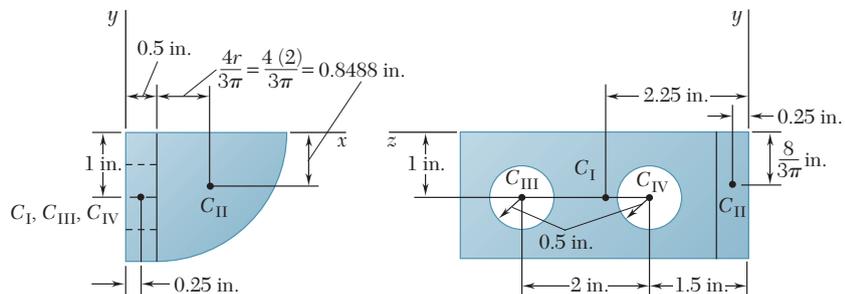
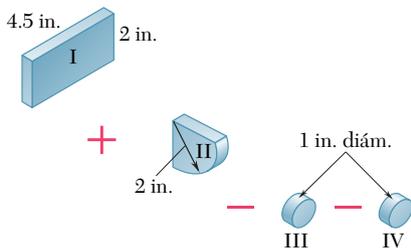


## PROBLEMA RESUELTO 5.12

Localice el centro de gravedad del elemento de una máquina hecho de acero que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es 1 in.

## SOLUCIÓN

El elemento de máquina se puede obtener sumándole a un paralelepípedo rectangular (I) un cuarto de cilindro (II) y, entonces, restando dos cilindros de 1 in. de diámetro (III y IV). Se determinan el volumen y las coordenadas del centroide de cada componente y se introducen en la tabla que se presenta a continuación. Entonces, al utilizar los datos que están en la tabla se determina el volumen total y los momentos de dicho volumen con respecto a cada uno de los planos coordenados.

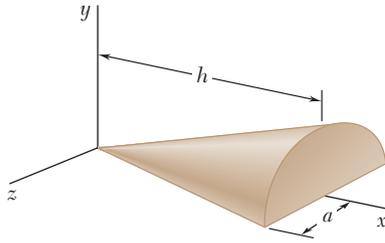


	$V, \text{ in}^3$	$\bar{x}, \text{ in.}$	$\bar{y}, \text{ in.}$	$\bar{z}, \text{ in.}$	$\bar{x}V, \text{ in}^4$	$\bar{y}V, \text{ in}^4$	$\bar{z}V, \text{ in}^4$
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma \bar{x}V = 3.048$	$\Sigma \bar{y}V = -5.047$	$\Sigma \bar{z}V = 8.555$

Por tanto,

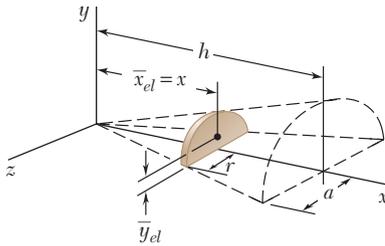
$$\begin{aligned} \bar{X}\Sigma V &= \Sigma \bar{x}V: & \bar{X}(5.286 \text{ in}^3) &= 3.048 \text{ in}^4 \\ \bar{Y}\Sigma V &= \Sigma \bar{y}V: & \bar{Y}(5.286 \text{ in}^3) &= -5.047 \text{ in}^4 \\ \bar{Z}\Sigma V &= \Sigma \bar{z}V: & \bar{Z}(5.286 \text{ in}^3) &= 8.555 \text{ in}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 0.577 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Y} &= -0.955 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Z} &= 1.618 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



### PROBLEMA RESUELTO 5.13

Determine la ubicación del centroide del medio como circular recto mostrado en la figura.



### SOLUCIÓN

Como el plano  $xy$  es un plano de simetría, el centroide se encuentra en dicho plano y  $\bar{z} = 0$ . Se selecciona una placa de espesor  $dx$  como el elemento diferencial. El volumen de dicho elemento es

$$dV = \frac{1}{2}\pi r^2 dx$$

Las coordenadas  $\bar{x}_{el}$  y  $\bar{y}_{el}$  del centroide del elemento son

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

donde  $\bar{y}_{el}$  se obtiene a partir de la figura 5.8 (área semicircular).

Se observa que  $r$  es proporcional a  $x$  y se escribe

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \quad r = \frac{a}{h}x$$

Así, el volumen del cuerpo está dado por

$$V = \int dV = \int_0^h \frac{1}{2}\pi r^2 dx = \int_0^h \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al plano  $yz$  es  $\bar{x}_{el} dV$ ; en consecuencia, el momento total del cuerpo con respecto a ese mismo plano es

$$\int \bar{x}_{el} dV = \int_0^h x \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) dx = \int_0^h x \left(\frac{1}{2}\pi\right) \left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Por tanto,

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{x} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \quad \bar{x} = \frac{3}{4}h \quad \blacktriangleleft$$

En forma similar, el momento del elemento diferencial con respecto al plano  $zx$  es  $\bar{y}_{el} dV$ ; en consecuencia, el momento total es

$$\int \bar{y}_{el} dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi} \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Por tanto,

$$\bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{y} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \quad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \quad \blacktriangleleft$$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta lección se pedirá localizar los centros de gravedad de cuerpos tridimensionales o los centroides de sus volúmenes. Todas las técnicas que se presentaron anteriormente para cuerpos bidimensionales, como usar simetría, dividir al cuerpo en formas comunes, seleccionar el elemento diferencial más eficiente, entre otros, también pueden aplicarse para el caso tridimensional general.

**1. Localización de los centros de gravedad de cuerpos compuestos.** En general, se deben utilizar las ecuaciones (5.19):

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \quad (5.19)$$

Sin embargo, para el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad del mismo coincide con el *centroide de su volumen*. Por tanto, para este caso específico, el centro de gravedad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.20):

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \quad (5.20)$$

Debe observarse que estas ecuaciones son sólo una extensión de las ecuaciones utilizadas para los problemas bidimensionales considerados en secciones anteriores de este mismo capítulo. Como lo ilustran las soluciones de los problemas resueltos 5.11 y 5.12, los métodos de solución para problemas bidimensionales y tridimensionales son idénticos. Por tanto, de nuevo se recomienda construir diagramas y tablas apropiadas cuando se analicen cuerpos compuestos. Además, cuando se estudie el problema resuelto 5.12, se debe observar cómo las coordenadas  $x$  y  $y$  del centroide del cuarto de cilindro se obtuvieron mediante las ecuaciones para el centroide de un cuarto de círculo.

Se debe señalar que se presentan dos *casos especiales* de interés cuando el cuerpo dado consiste de alambres uniformes o de placas uniformes hechos del mismo material.

**a)** Para un cuerpo hecho de *varios elementos de alambre* que tienen la *misma sección transversal uniforme*, el área  $A$  de la sección transversal de los elementos de alambre se podrá eliminar de las ecuaciones (5.20) cuando  $V$  se reemplaza por el producto  $AL$ , donde  $L$  es la longitud de un elemento dado. Entonces, para este caso, las ecuaciones (5.20) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma \bar{x}L \quad \bar{Y}\Sigma L = \Sigma \bar{y}L \quad \bar{Z}\Sigma L = \Sigma \bar{z}L$$

**b)** Para un cuerpo hecho de *varias placas* que tienen el *mismo espesor uniforme*, el espesor  $t$  de las placas puede factorizarse y eliminarse de las ecuaciones (5.20) cuando  $V$  se reemplaza por el producto  $tA$ , donde  $A$  es el área de una placa dada. Por tanto, en este caso, las ecuaciones (5.20) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \quad \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad \bar{Z}\Sigma A = \Sigma \bar{z}A$$

**2. Localización de los centroides de volúmenes por integración directa.** Como se explicó en la sección 5.11, la evaluación de las integrales de las ecuaciones (5.21) se puede simplificar seleccionando para el elemento de volumen  $dV$  un filamento delgado (figura 5.22) o una placa delgada (figura 5.23). Por tanto, la solución se debe iniciar con la identificación, de ser posible, del  $dV$  que produce integrales sencillas o dobles que son fáciles de calcular. Para cuerpos de revolución, este elemento de volumen puede ser una placa delgada (como en el problema resuelto 5.13) o un cascarón cilíndrico delgado. Sin embargo, es importante recordar que las relaciones que se establezcan entre las variables (como las relaciones entre  $r$  y  $x$  en el problema resuelto 5.13) afectarán directamente la complejidad de las integrales que se tendrán que calcular. Finalmente, conviene recordar que  $\bar{x}_{el}$ ,  $\bar{y}_{el}$  y  $\bar{z}_{el}$  en las ecuaciones (5.22) son las coordenadas del centroide de  $dV$ .

# Problemas

**5.90** El cuerpo compuesto que se presenta en la figura se obtiene al remover un hemisferio de radio  $r$  de un cilindro de radio  $R$  y altura  $2R$ . Determine a) la coordenada  $y$  del centroide cuando  $r = 3R/4$ , b) la relación  $r/R$  para la cual  $\bar{y} = -1.2R$ .

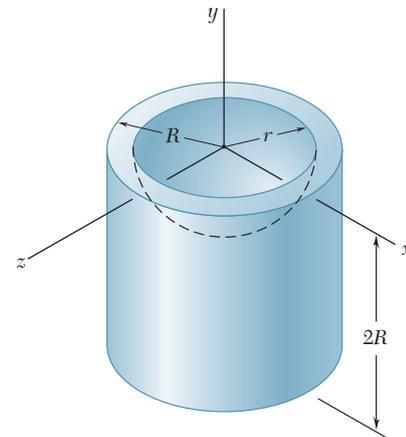


Figura P5.90

**5.91** Determine la coordenada  $y$  del centroide del cuerpo mostrado en la figura.

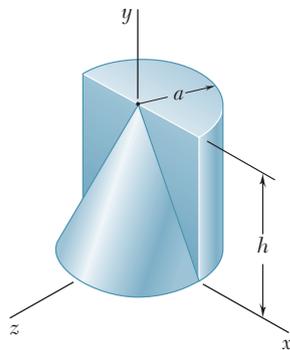


Figura P5.91 y P5.92

**5.92** Determine la coordenada  $z$  del centroide del cuerpo mostrado en la figura. (Sugerencia: Use el resultado del problema resuelto 5.13.)

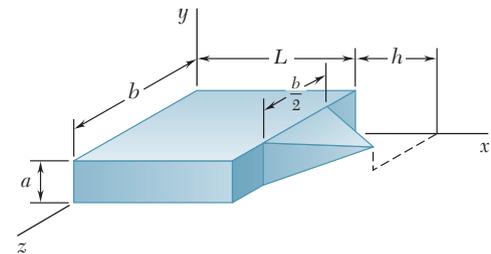


Figura P5.93

**5.93** Para el cuerpo mostrado en la figura, determine a) el valor de  $\bar{x}$  donde  $h = L/2$ , b) la relación  $h/L$  para la cual  $\bar{x} = L$ .

**5.94** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada  $y$  del centro de gravedad.

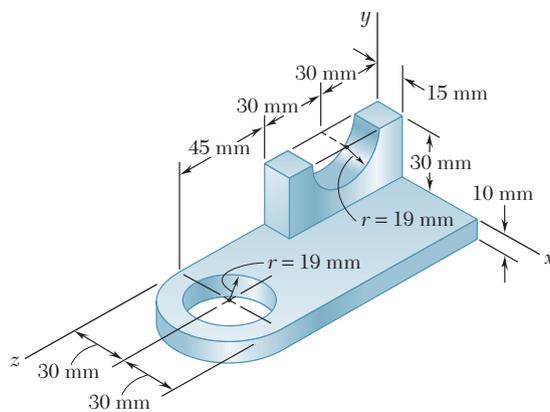


Figura P5.94 y P5.95

**5.95** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada  $z$  del centro de gravedad.

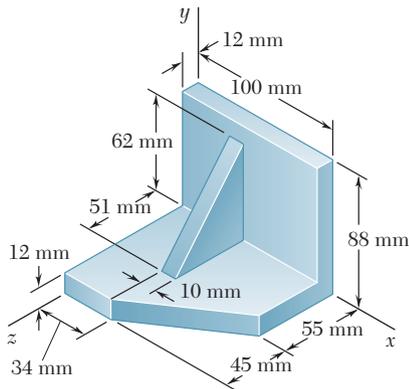


Figura P5.96 y P5.97

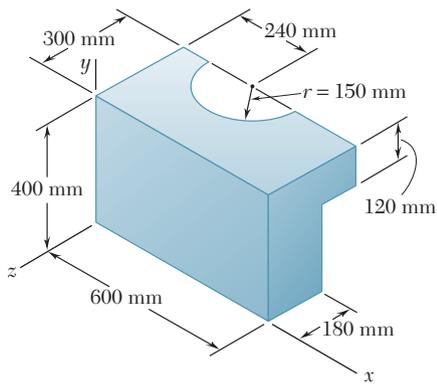


Figura P5.100

5.96 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada  $x$  del centro de gravedad.

5.97 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada  $z$  del centro de gravedad.

5.98 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada  $x$  del centro de gravedad.

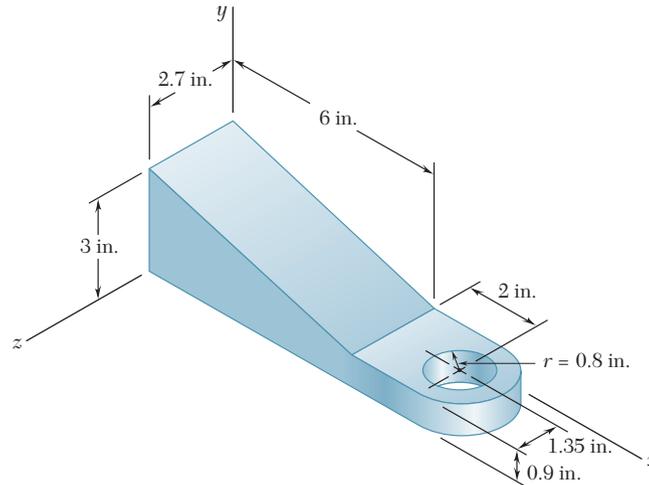


Figura P5.98 y P5.99

5.99 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada  $y$  del centro de gravedad.

5.100 Una hoja de metal con espesor uniforme se utiliza para fabricar una porción de la teja de un techo. Localice el centro de gravedad de la teja si está compuesta de los tres elementos que se muestran en la figura.

5.101 Localice el centro de gravedad de la hoja de metal que se muestra en la figura.

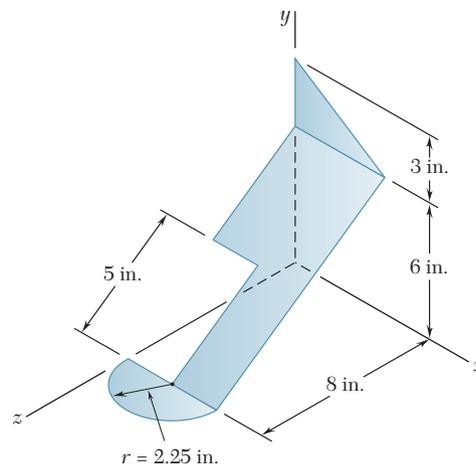


Figura P5.101

**5.102** Localice el centro de gravedad de la hoja de metal que tiene la forma indicada por la figura.

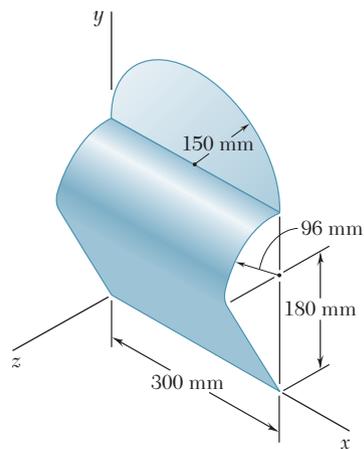


Figura P5.102

**\*5.103** La cubierta de un dispositivo electrónico se forma a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la cubierta.

**5.104** Localice el centro de gravedad de una canaleta hecha a partir de una hoja metálica de espesor uniforme.

**5.105** Un ducto cilíndrico de 8 in. de diámetro y un ducto rectangular de  $4 \times 8$  in. se unen en la forma indicada en la figura. Localice el centro de gravedad del ensamble si se sabe que los ductos fueron fabricados con la misma hoja de metal de espesor uniforme.

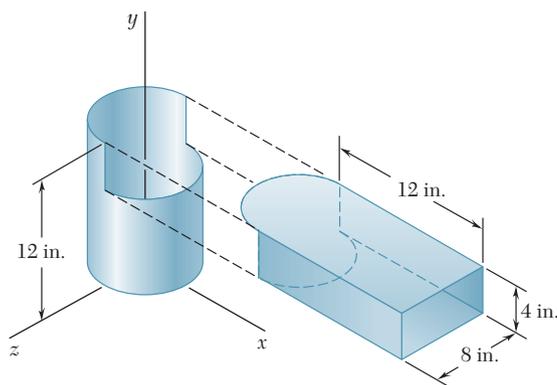


Figura P5.105

**5.106** El toldo para ventana que se muestra en la figura está fabricado a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

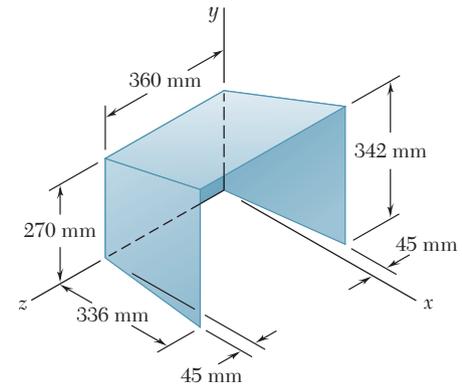


Figura P5.103

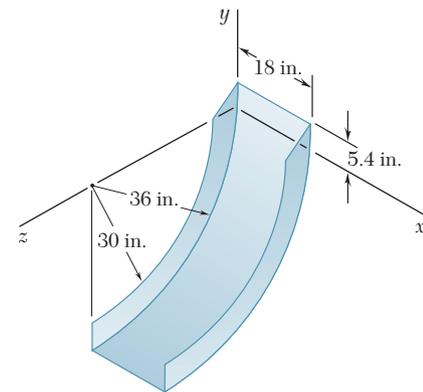


Figura P5.104

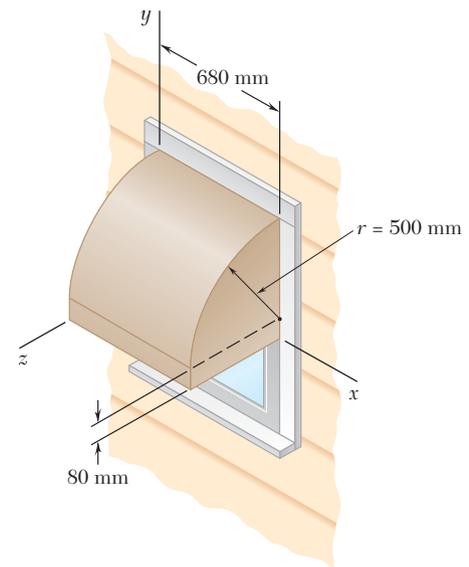


Figura P5.106

**5.107** La cubierta frontal de un reloj de pared está hecha de material plástico delgado y tiene espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la cubierta.

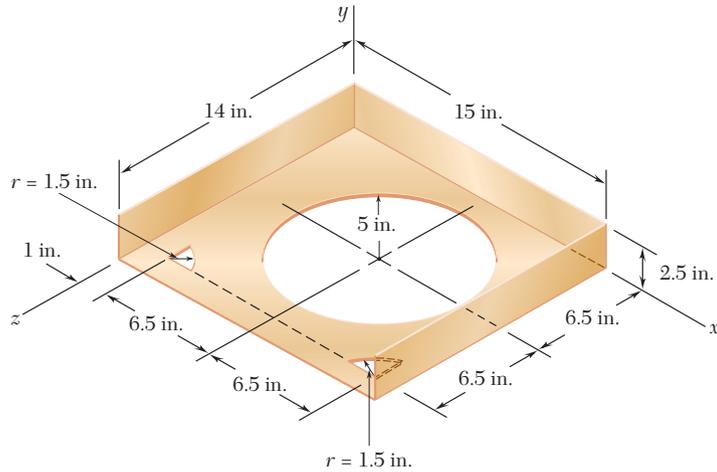


Figura P5.107

**5.108** Una varilla delgada de latón que tiene sección transversal uniforme se dobla en la forma indicada por la figura. Localice su centro de gravedad.

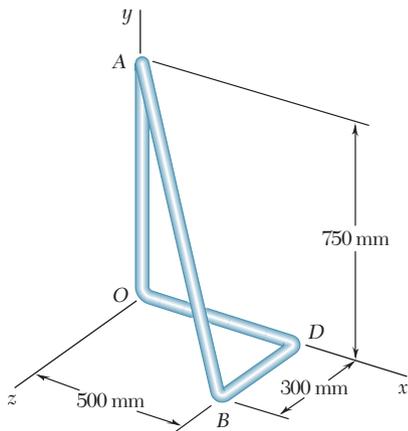


Figura P5.108

**5.109** Un alambre delgado de acero con sección transversal uniforme se dobla como indica la figura, donde el arco BC es un cuarto del círculo del radio  $R$ . Localice su centro de gravedad.

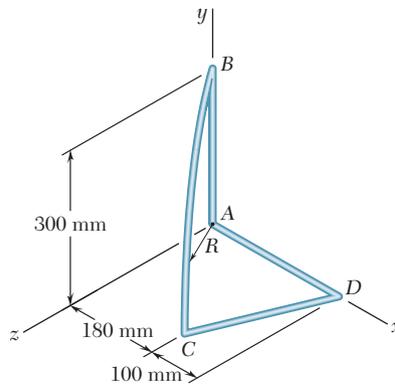


Figura P5.109

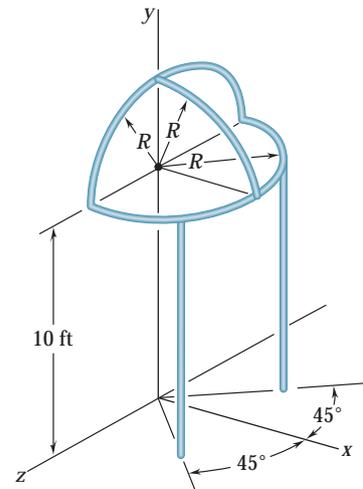


Figura P5.110

**5.110** La metalistería decorativa que está a la entrada de un comercio se fabrica a partir de tubería estructural de acero. Si  $R = 4$  ft, localice el centro de gravedad de la metalistería.

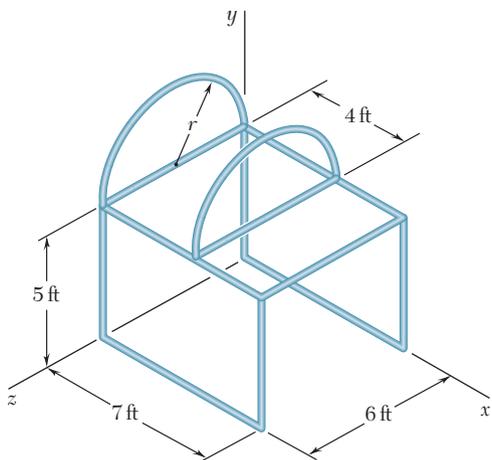


Figura P5.111

**5.111** El marco de una cubierta para equipo portátil está construido con tubería de acero de diámetro uniforme. Localice el centro de gravedad del marco.

**5.112** Una lesna marcadora tiene mango de plástico y vástago y punta de acero. Si los pesos específicos del plástico y del acero son, respectivamente, de  $0.0374 \text{ lb/in.}^3$  y  $0.284 \text{ lb/in.}^3$ , localice el centro de gravedad de la lesna.

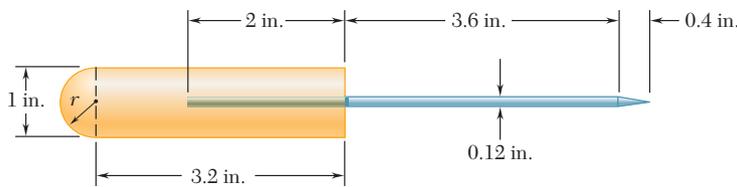


Figura P5.112

**5.113** Una polea tensora de banda plana está moldeada con policarbonato y tiene en el interior un mango de bronce. Si las densidades del policarbonato y del bronce son, respectivamente, de  $1\,250 \text{ kg/m}^3$  y  $8\,800 \text{ kg/m}^3$ , determine la coordenada  $x$  del centro de gravedad de la polea.

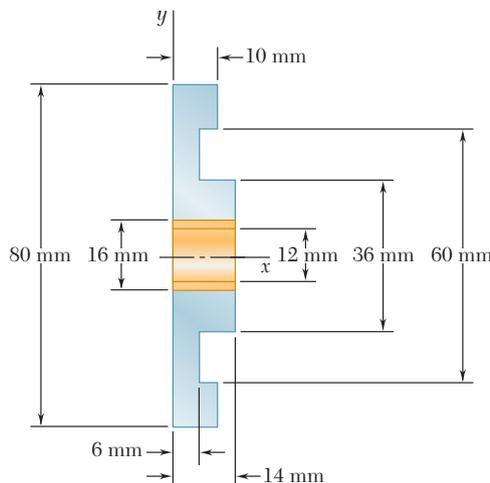


Figura P5.113

**5.114** Un poste para demarcar el camino en un jardín consiste en una pirámide regular truncada esculpida a partir de una roca con densidad de  $2\,570 \text{ kg/m}^3$ . La pirámide está montada sobre una base de acero de espesor  $h$ . Si la densidad del acero es de  $7\,860 \text{ kg/m}^3$  y la placa de acero está disponible en incrementos de 5 mm, especifique el espesor mínimo  $h$  para el cual el centro de gravedad del poste está aproximadamente 300 mm por encima de la arista superior de la base.

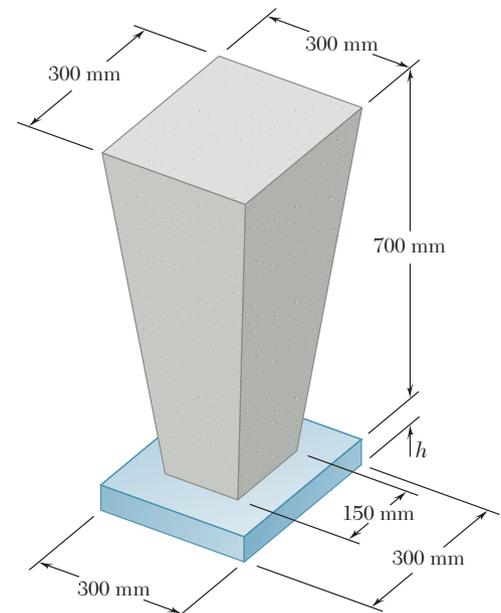


Figura P5.114

**5.115** Tres placas de latón están soldadas a un tubo de acero para formar la base de asta bandera que se muestra en la figura. Si la pared del tubo y cada placa tienen un espesor de 0.25 y 0.2 in., respectivamente, determine la localización del centro de gravedad de la base. (Pesos específicos: latón =  $0.306 \text{ lb/in.}^3$ , acero =  $0.284 \text{ lb/in.}^3$ ).

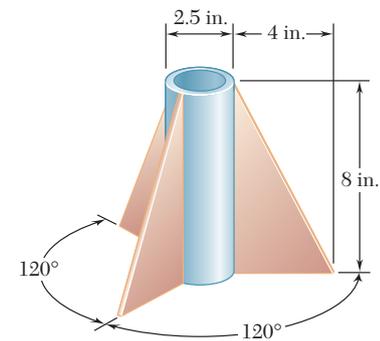


Figura P5.115

**5.116 a 5.118** Determine por integración directa los valores de  $\bar{x}$  para los dos volúmenes obtenidos al hacer pasar un plano de corte vertical a través de las formas mostradas en la figura 5.21. El plano de corte es paralelo a la base de la forma dada y la divide en dos volúmenes de la misma altura.

- 5.116** Una semiesfera.
- 5.117** Un semielipsoide de revolución.
- 5.118** Un paraboloides de revolución.

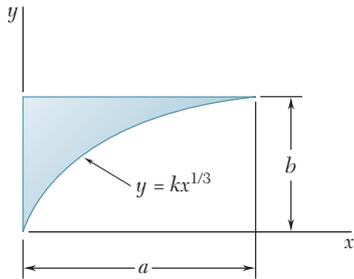


Figura P5.121

5.119 y 5.120 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor del eje  $x$ .

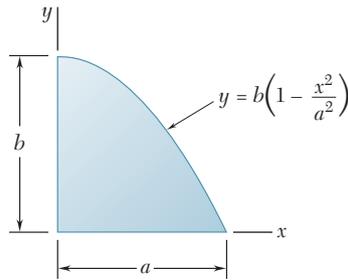


Figura P5.119

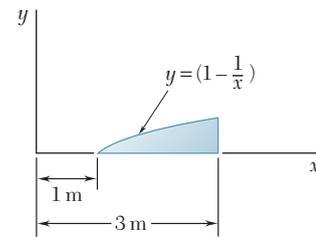


Figura P5.120

5.121 Localice el centroide del volumen que se obtiene al girar el área sombreada alrededor de la línea  $x = a$ .

\*5.122 Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva cosenoidal mostrada alrededor del eje  $x$ .

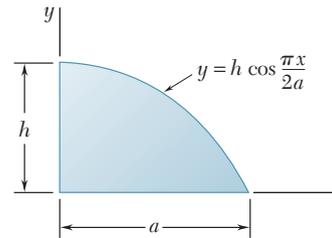


Figura P5.122 y P5.123

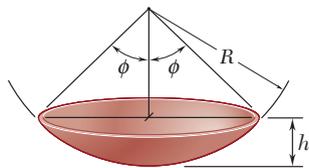


Figura P5.125

\*5.123 Localice el centroide del volumen generado al girar la porción de la curva cosenoidal mostrada alrededor del eje  $y$ . (Sugerencia: Use como elemento de volumen un cascarón cilíndrico delgado de radio  $r$  y espesor  $dr$ .)

\*5.124 Muestre que para una pirámide regular de altura  $h$  y  $n$  lados ( $n = 3, 4, \dots$ ) el centroide del volumen se localiza a una distancia  $h/4$  por encima de la base.

\*5.125 Una taza esférica delgada tiene radio  $R$  y espesor uniforme  $t$ . Demuestre por integración directa que el centro de gravedad de la taza se localiza a una distancia de  $h/2$  por encima de la base.

5.126 Los lados y la base de la ponchera que se muestra en la figura tienen un espesor uniforme  $t$ . Si  $t \ll R$  y  $R = 350$  mm, determine la localización del centro de gravedad de a) la ponchera, b) el ponche.

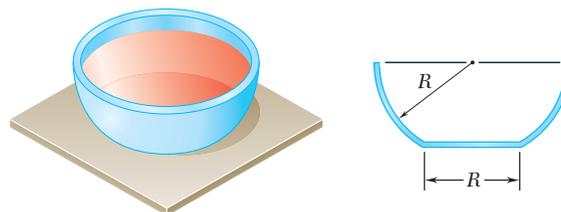


Figura P5.126

**5.127** Después de medir y marcar un terreno, un constructor coloca cuatro estacas para identificar las esquinas de la losa donde levantará una casa. Para suministrar el firme, el constructor vierte un mínimo de 3 in. de grava por debajo de la losa. Determine el volumen de grava requerido y la coordenada  $x$  del centroide de este volumen. (*Sugerencia:* La superficie del fondo de la grava es un plano oblicuo que puede representarse mediante la ecuación  $y = a + bx + cz$ .)

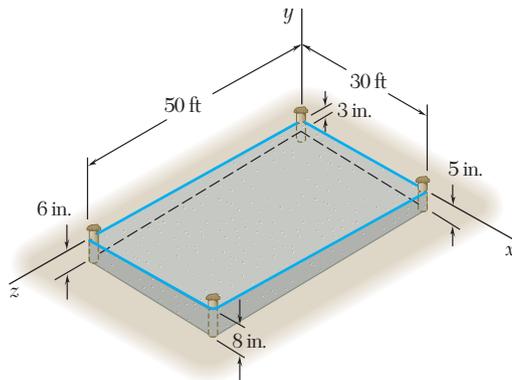


Figura P5.127

**5.128** Mediante integración directa, determine la coordenada  $z$  del centroide del volumen que se muestra en la figura, el cual fue cortado de un prisma rectangular mediante un plano oblicuo dado por la ecuación  $y = y_0 - y_1(x/a) - y_2(z/b)$ .

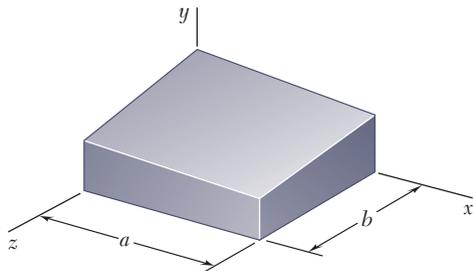


Figura P5.128

**5.129** Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura, la cual fue cortada a partir de un cilindro circular mediante un plano inclinado.

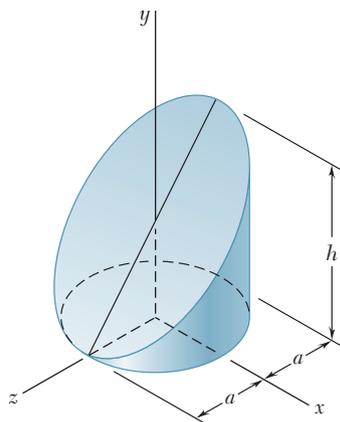


Figura P5.129

## REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

Este capítulo estuvo dedicado primordialmente a la determinación del *centro de gravedad* de un cuerpo rígido, es decir, determinar el punto  $G$  donde una sola fuerza  $\mathbf{W}$ , llamada el *peso del cuerpo*, se puede aplicar para representar el efecto de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

En la primera parte del capítulo se consideraron *cuerpos bidimensionales* como placas planas y alambres contenidos en el plano  $xy$ . Al sumar componentes de fuerza en la dirección vertical  $z$  y sumar momentos con respecto a los ejes horizontales  $x$  y  $y$  [sección 5.2], se derivaron las relaciones

$$W = \int dW \quad \bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

las cuales definen el peso del cuerpo y las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  de su centro de gravedad.

Centroide de un área o línea

En el caso de una *placa plana homogénea de espesor uniforme* [sección 5.3], el centro de gravedad  $G$  de la placa coincide con el *centroide  $C$  del área  $A$*  de la placa cuyas coordenadas están definidas por las relaciones

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

De manera similar, la determinación del centro de gravedad de un *alambre homogéneo de sección transversal uniforme* que está contenido en un plano, se reduce a la determinación del *centroide  $C$  de la línea  $L$*  que representa al alambre; así, se tiene

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

Primeros momentos

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como los *primeros momentos* del área  $A$  con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , los cuales se representan, respectivamente, con  $Q_y$  y  $Q_x$  [sección 5.4]. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Los primeros momentos de una línea se pueden definir en forma similar.

Propiedades de simetría

La determinación del centroide  $C$  de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas *propiedades de simetría*. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje, su centroide  $C$  se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea

es simétrica con respecto a dos ejes,  $C$  está localizado en la intersección de los dos ejes; si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro  $O$ ,  $C$  coincide con  $O$ .

Las áreas y los *centroides de varias formas comunes* están tabulados en la figura 5.8. Cuando una placa puede dividirse en varias de estas formas, las coordenadas  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  de su centro de gravedad  $G$  se pueden determinar a partir de las coordenadas  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$  y  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$  de los centros de gravedad  $G_1, G_2, \dots$  de las diferentes partes [sección 5.5]. Al igualar, respectivamente, los momentos en relación a los ejes  $y$  y  $x$  (figura 5.24), se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad (5.7)$$

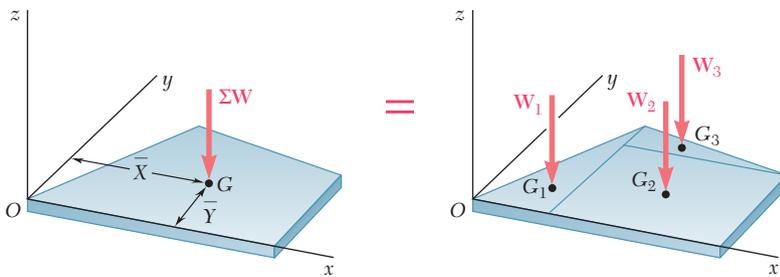


Figura 5.24

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, su centro de gravedad coincide con el centroide  $C$  del área de la placa y las ecuaciones (5.7) se reducen a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A \quad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad (5.8)$$

De estas ecuaciones se obtienen los primeros momentos del área compuesta o pueden resolverse para las coordenadas  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  de su centroide [problema resuelto 5.1]. La determinación del centro de gravedad de un alambre compuesto se lleva a cabo de forma similar [problema resuelto 5.2].

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centroide pueden determinarse por *integración* [sección 5.6]. Esto se puede realizar evaluando las integrales dobles en las ecuaciones (5.3) o evaluando una *sola integral* que emplea uno de los elementos de área mostrados en la figura 4.12 que tienen la forma de un rectángulo delgado o de un fragmento de círculo delgado. Al representar con  $\bar{x}_{el}$  y  $\bar{y}_{el}$  las coordenadas del centroide del elemento  $dA$ , se tiene que

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad (5.9)$$

Es ventajoso emplear el mismo elemento del área para el cálculo de los dos primeros momentos  $Q_y$  y  $Q_x$ ; además, el mismo elemento también se puede utilizar para determinar el área  $A$  [problema resuelto 5.4].

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Determinación del centroide por integración

Teoremas de Pappus-Guldinus

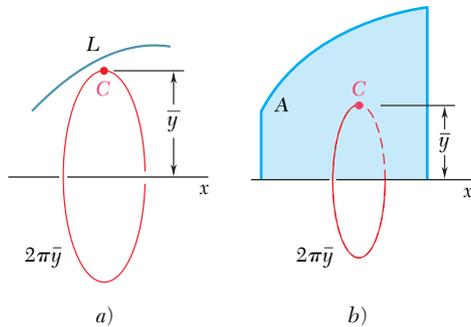


Figura 5.25

Cargas distribuidas

Los *teoremas de Pappus-Guldinus* relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con la determinación del centroide de la curva generatriz o del área generatriz [sección 5.7]. El área  $A$  de la superficie generada al rotar una curva de longitud  $L$  con respecto a un eje fijo (figura 5.25a) es igual a

$$A = 2\pi\bar{y}L \quad (5.10)$$

donde  $\bar{y}$  representa la distancia desde el centroide  $C$  de la curva hasta el eje fijo. En forma similar, el volumen  $V$  del cuerpo generado al rotar un área  $A$  alrededor de un eje fijo (figura 5.25b) es igual a

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad (5.11)$$

donde  $\bar{y}$  representa la distancia desde el centroide  $C$  del área hasta el eje fijo.

El concepto de centroide de un área también se puede utilizar para resolver otros problemas distintos de aquellos relacionados con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga [sección 5.8], se puede reemplazar una *carga distribuida*  $w$  por una carga concentrada  $W$  igual en magnitud al área  $A$  bajo la curva de carga y que pasa a través del centroide  $C$  de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una *placa rectangular que está sumergida en un líquido* [sección 5.9].

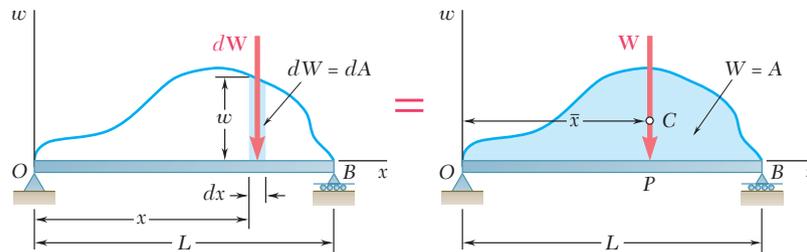


Figura 5.26

Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional

Centroide de un volumen

La última parte del capítulo estuvo dedicada a la determinación del *centro de gravedad*  $G$  de un *cuerpo tridimensional*. Las coordenadas  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  de  $G$  se definieron por las relaciones

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW \quad (5.16)$$

En el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad  $G$  coincide con el *centroide*  $C$  del *volumen*  $V$  del cuerpo; las coordenadas de  $C$  están definidas por las relaciones

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.18)$$

Si el volumen tiene un *plano de simetría*, su centroide  $C$  estará en dicho plano; si el volumen posee dos plano de simetría,  $C$  estará localizado sobre la línea de intersección de los dos planos; si el volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un solo punto,  $C$  coincidirá con dicho punto [sección 5.10].

Los volúmenes y los centroides de varias formas tridimensionales comunes están tabulados en la figura 5.21. Cuando un cuerpo se puede dividir en varias de estas formas, las coordenadas  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  de su centro de gravedad  $G$  se pueden determinar a partir de las coordenadas correspondientes de los centros de gravedad de sus diferentes partes [sección 5.11]. Así se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W \quad (5.19)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide  $C$  de su volumen y se escribe [problemas resueltos 5.11 y 5.12]

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V \quad (5.20)$$

Cuando el volumen está limitado por superficies analíticas, las coordenadas de su centroide se pueden determinar por *integración* [sección 5.12]. Para evitar el cálculo de las integrales triples

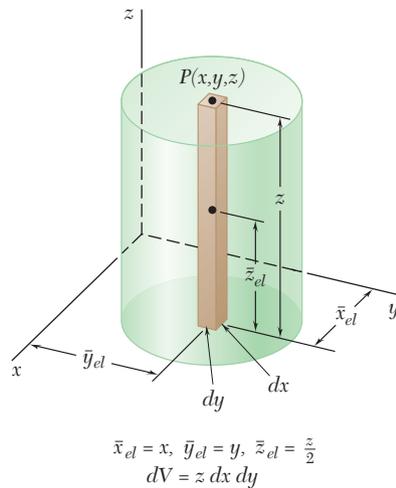


Figura 5.27

en la ecuación (5.18), se pueden usar elementos de volumen que tienen la forma de filamentos delgados, como se muestra en la figura 5.27. Al representar con  $\bar{x}_{el}$ ,  $\bar{y}_{el}$  y  $\bar{z}_{el}$  las coordenadas del centroide del elemento  $dV$ , se reescriben las ecuaciones (5.18) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} \, dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} \, dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} \, dV \quad (5.22)$$

las cuales involucran sólo integrales dobles. Si el volumen tiene *dos planos de simetría*, su centroide  $C$  está localizado sobre la línea de intersección de dichos planos. Si se selecciona al eje  $x$  de manera que quede a lo largo de esa línea y se divide el volumen en placas delgadas paralelas al plano  $yz$ , se puede determinar  $C$  a partir de la relación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} \, dV \quad (5.23)$$

realizando una *sola integración* [problema resuelto 5.13]. Para un cuerpo de revolución, dichas placas son circulares y su volumen está dado en la figura 5.28.

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Determinación del centroide por integración

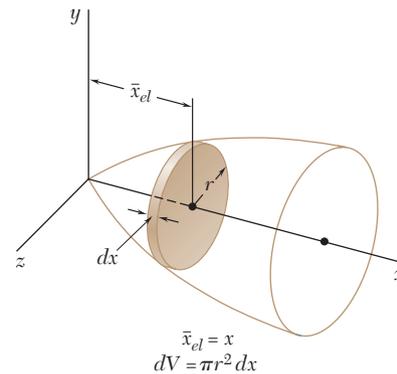


Figura 5.28

# Problemas de repaso

**5.130 y 5.131** Localice el centroide de la área plana mostrada en la figura.

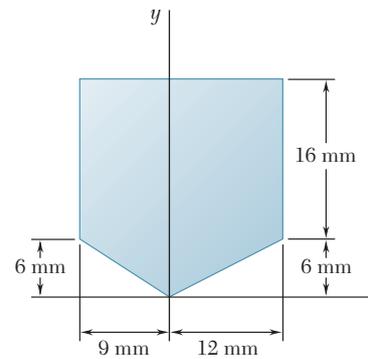


Figura P5.130

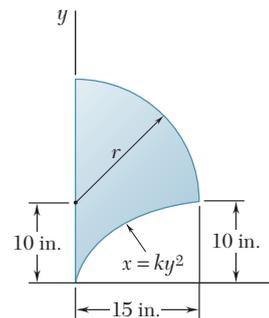


Figura P5.131

**5.132** Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de la figura P5.130. Localice el centro de gravedad de la figura de alambre formada de esta manera.

**5.133** El alambre homogéneo  $ABCD$  está doblado como se muestra en la figura y se conecta a una articulación colocada en  $C$ . Determine la longitud  $L$  para la cual el tramo  $BCD$  del alambre se mantiene horizontal.

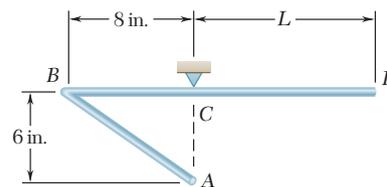


Figura P5.133

**5.134** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de  $a$  y  $h$ .

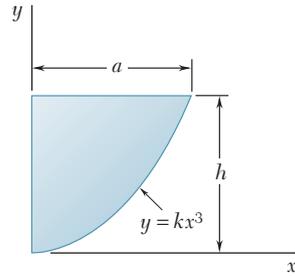


Figura P5.134

**5.135** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de  $a$  y  $b$ .

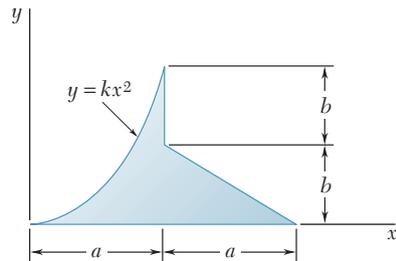


Figura P5.135

**5.136** Si  $R = 12$  in., determine la capacidad, en galones, de la ponchera mostrada en la figura.

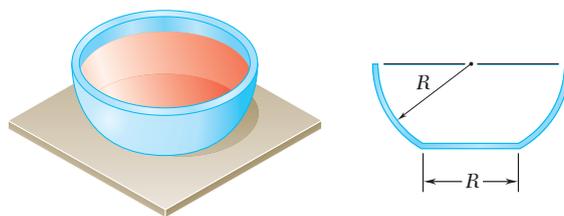


Figura P5.136

**5.137 y 5.138** Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de la viga.

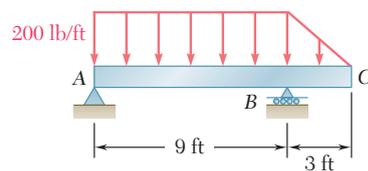


Figura P5.137

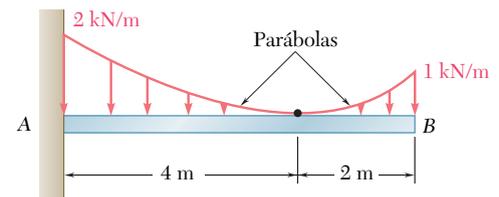


Figura P5.138

**5.139** El lado  $AB$  del tanque de  $9 \times 12$  ft se sostiene mediante bisagras instaladas en el fondo  $A$  y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada  $BC$ . La fuerza máxima de tensión que la barra puede soportar sin fracturarse es de 40 kips, y las especificaciones de diseño requieren que la fuerza en la barra no exceda el 20 por ciento de dicho valor. Si el tanque se llena de agua lentamente, determine la profundidad máxima permisible  $d$  que puede tener el agua en el tanque.

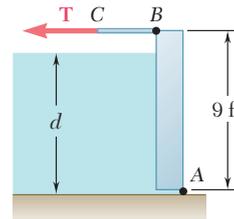


Figura P5.139

**5.140** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, determine la coordenada  $x$  del centro de gravedad.

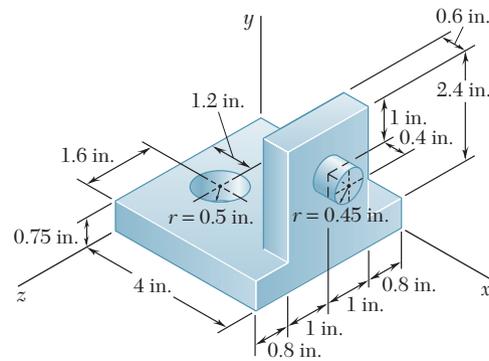


Figura P5.140

**5.141** A partir de una hoja de metal de espesor uniforme, se forma una ménsula de montaje para componentes electrónicos. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

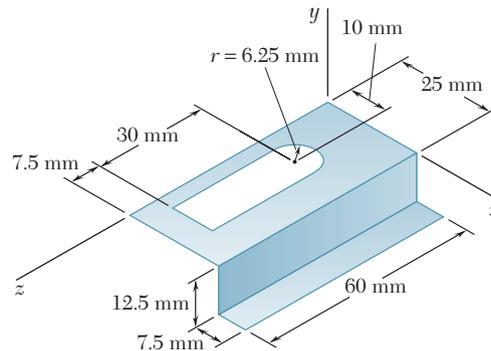


Figura P5.141

# Problemas de computadora

**5.C1** Determine las coordenadas  $x$  y  $y$  del centroide del trapecioide mostrado en la figura, si se sabe que  $h_1 = a/n^2$  y  $h_2 = a/n$ . Grafique los valores de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  para  $1 \leq n \leq 4$  y  $a = 6$  in.

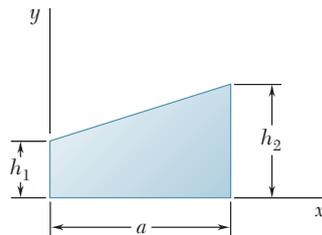


Figura P5.C1

**5.C2** Determine la distancia  $h$  para la cual el centroide del área sombreada esté tan alto como sea posible por encima de  $BB'$ . Grafique la relación  $h/b$  como una función de  $k$  para  $0.125 \leq k \leq 0.875$ .

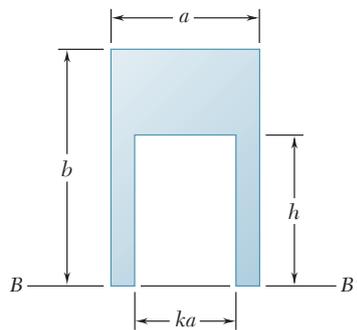


Figura P5.C2

**5.C3** Aproxime la enjuta general mostrada en la figura usando una serie de rectángulos, cada uno con un ancho  $\Delta a$  y de la forma  $bcc'b'$ , y después use *software* para calcular las coordenadas del centroide del área. Localice el centroide cuando: a)  $m = 2$ ,  $a = 4$  in.,  $h = 4$  in.; b)  $m = 2$ ,  $a = 4$  in.,  $h = 25$  in.; c)  $m = 5$ ,  $a = 4$  in.,  $h = 4$  in. y d)  $m = 5$ ,  $a = 4$  in.,  $h = 25$  in. En cada caso compare las respuestas obtenidas con los valores exactos de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  calculados a partir de las fórmulas dadas en la figura 5.8A y determine el porcentaje de error.

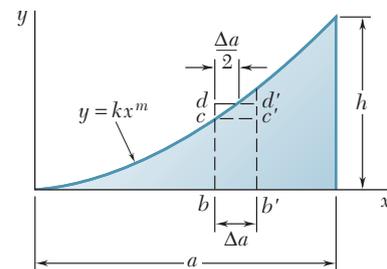


Figura P5.C3

**5.C4** Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área mostrada alrededor del eje  $y$ , cuando  $a = 80$  mm y a)  $n = 1$ , b)  $n = 2$ , c)  $n = 3$ .

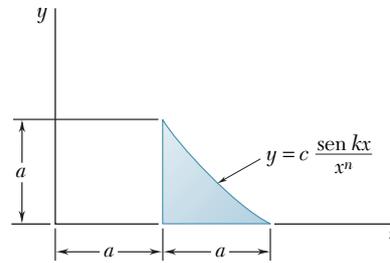


Figura P5.C4

**5.C5** La compuerta  $AB$  de ancho uniforme  $w$  se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante una bisagra a lo largo de su extremo superior  $A$  y por medio de un pasador localizado en el centro de su extremo inferior  $B$ . Determine la fuerza sobre el pasador  $B$  como una función de la profundidad del agua  $d$ . Grafique la fuerza sobre el pasador  $B$  como una función de la profundidad  $d$  para  $0.54 \text{ m} \leq d \leq 1.5 \text{ m}$  cuando; a)  $w = 0.25$  m, b)  $w = 0.50$  m, c)  $w = 0.75$  m, d)  $w = 1$  m. La densidad del agua es  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

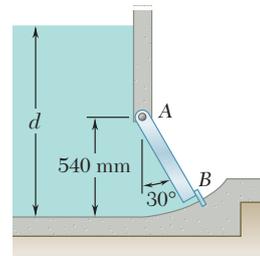


Figura P5.C5

**5.C6** Un tanque abierto debe llenarse lentamente con agua. Determine la resultante y la dirección de la fuerza de presión ejercida por el agua sobre una sección del lado  $ABC$  del tanque, de 4 ft de ancho, como una función de la profundidad  $d$ . Con el *software*, grafique la fuerza de presión como una función de  $d$  para  $0 \leq d \leq 10$  ft. El peso específico del agua es  $62.4 \text{ lb/ft}^3$ .

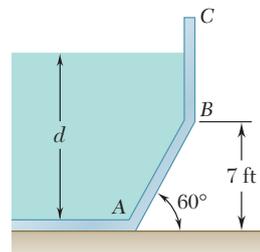


Figura P5.C6

**5.C7** En la figura se muestra la sección transversal de un dique de concreto. Para un dique con una sección de 1 m de ancho, grafique la magnitud de la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base  $AB$  del dique y de la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara  $BC$  del dique, como funciones de la profundidad  $d$  del agua para  $0 \leq d \leq 16$  m. Las densidades del concreto y el agua son, respectivamente,  $2.40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y  $10^3 \text{ kg/m}^3$ .

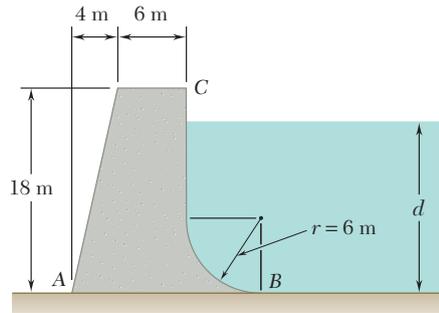


Figura P5.C7

**5.C8** Una viga está sometida a la carga mostrada en la figura. Grafique la magnitud de las reacciones verticales en los apoyos  $A$  y  $B$  como funciones de la distancia  $a$  para  $0 \leq a \leq 3$  m.

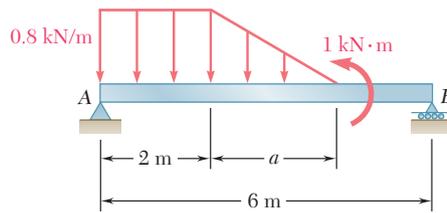


Figura P5.C8

**5.C9** La estructura tridimensional mostrada en la figura está fabricada a partir de cinco barras delgadas de acero del mismo diámetro. Con el software determine las coordenadas del centro de gravedad de la estructura. Localice las coordenadas del centro de gravedad cuando: a)  $h = 40$  ft,  $R = 15$  ft,  $\alpha = 90^\circ$ ; b)  $h = 22$  in.,  $R = 30$  in.,  $\alpha = 30^\circ$  y c)  $h = 70$  ft,  $R = 65$  ft,  $\alpha = 135^\circ$ .

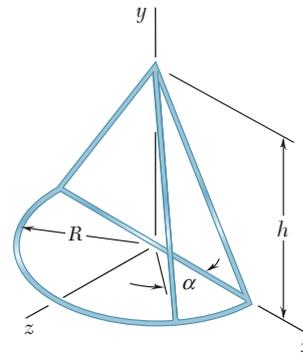


Figura P5.C9

**5.C10** Determine la coordenada  $\bar{y}$  del centroide del cuerpo que se muestra en la figura cuando  $h = nb$  y  $h = n^2b$ . Grafique  $\bar{y}$  como una función de  $n$  para ambos casos usando  $1 \leq n \leq 10$  y a)  $b = 4$  in., b)  $b = 6$  in., c)  $b = 8$  in.

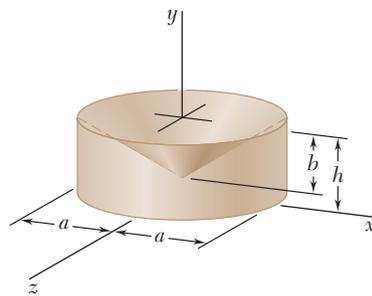


Figura P5.C10