



Adición de sistemas de fuerzas coplanares

Ejemplo: Determine magnitud y orientación de la fuerza resultante

a) Notación escalar:

$$\sum F_x = R_x$$

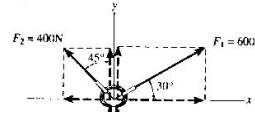
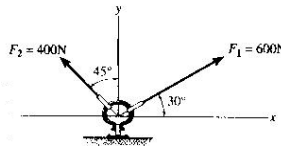
$$R_x = 600 (\cos 30) - 400 (\sen 45)$$

$$R_x = 236.8 \text{ N}$$

$$\sum F_y = R_y$$

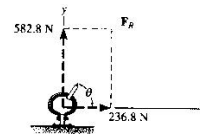
$$R_y = 600 (\sen 30) + 400 (\cos 45)$$

$$R_y = 582.8 \text{ N}$$



La magnitud de la fuerza resultante =  $FR = ((236.8^2 + 582.8^2)^{1/2}$

El ángulo de dirección  $\theta$  será:  $\theta = \tan^{-1} R_y / R_x = (582.8 / 236.8) = 67.9^\circ$



b) Notación Vectorial

Expresando cada fuerza como un vector cartesiano resulta:

$$F_1 = 600 \cos 30^\circ i + 600 \sen 30^\circ j$$

$$F_2 = - 400 \sen 45^\circ i + 400 \cos 45^\circ j$$

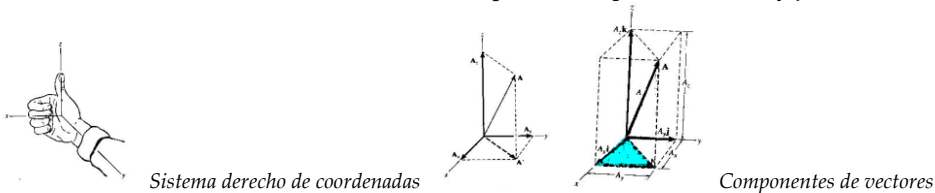
Asi la fuerza resultante sera:

$$FR = (600 \cos 30^\circ - 400 \sen 45^\circ) i + (600 \sen 30^\circ + 400 \cos 45^\circ) j$$

$$FR = (236.8 i + 582.8 j)$$

Vectores cartesianos

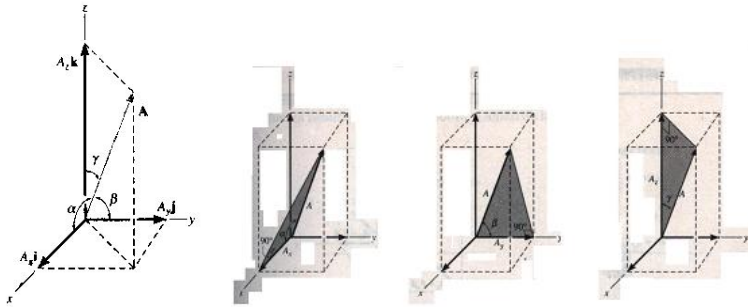
Todas las operaciones del algebra vectorial aplicadas a la solución de problemas en tres dimensiones se simplifican mucho si primero los vectores se expresan de forma cartesiana. Para el desarrollo de estas operaciones se considera un sistema derecho de coordenadas en el cual el eje z siempre esta hacia arriba (cenit) y al cerrar la mano los dedos indiquen la parte positiva de los ejes X y Y. Las componentes rectangulares de un vector en tres dimensiones podrán obtenerse mediante una aplicación sucesiva de la ley del paralelogramo, por ejemplo el vector mostrado podrá resolverse en sus componentes  $A = (A_x + A_y + A_z)$ ;  $A' = A_x + A_y$ . De modo que  $A = A_x + A_y + A_z$  el que puede ser expresado como vector cartesiano a través de los vectores unitarios cartesianos quedando que  $A = A_x i + A_y j + A_z k$ .



La magnitud de este vector será  $A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$

La dirección se define por los ángulos directores coordenados (Cosenos directores) donde

$$\cos \alpha = (A_x/A) \quad \cos \beta = (A_y/A) \quad \cos \gamma = (A_z/A)$$



El vector unitario de dirección de A de manera vectorial será:

$$U_A = (A_x/A) i + (A_y/A) j + (A_z/A) k$$

$$U_A = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$

De estas ecuaciones se deduce que:  $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1$

De manera general si se conocen los ángulos directores y la magnitud de A, este puede expresarse en forma vectorial como:

$$A = A U_A$$

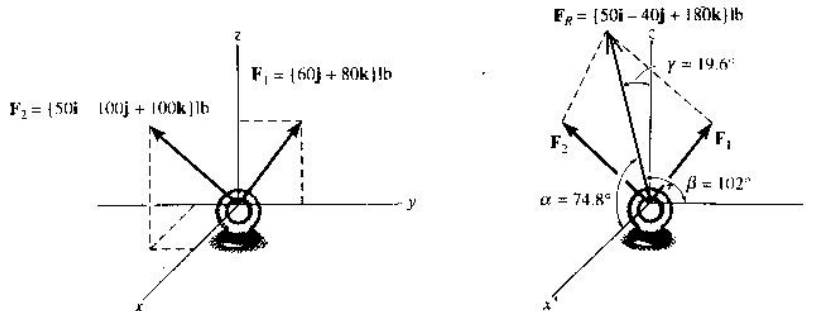
$$A = A \cos \alpha i + A \cos \beta j + A \cos \gamma k$$

La fuerza resultante será el vector suma de todas las fuerzas en el sistema

$$F_R = \sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k$$

**Ejemplos**

1. Determine la magnitud y los ángulos directores de la fuerza resultante.



$$F_R = F_1 + F_2$$

$$F_R = (60 j + 80 k) + (50 i - 100 j + 100 k)$$

$$F_R = (50 i - 40 j + 180 k) \text{ lb}$$

La magnitud de la fuerza resultante será:

$$F_R = ((50)^2 + (-40)^2 + (180)^2) = 191 \text{ lb}$$

Los cosenos directores se encuentran de las componentes del vector unitario

$$U_{FR} = (F_R/F_R) = (50/191 i - 40/191 j + 180/191 k) \text{ lb}$$

De manera que:

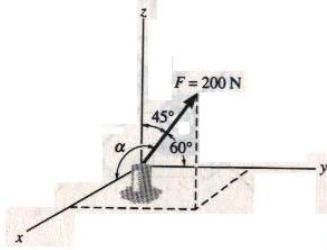
$$\cos \alpha = 50/191 \quad \text{por tanto } \alpha = 74.8^\circ$$

$$\cos \beta = -40/191 \quad \text{por tanto } \beta = 102^\circ$$

$$\cos \gamma = 180/191 \quad \text{por tanto } \gamma = 19.6^\circ$$



### 2. Expresar la fuerza como vector cartesiano



Se calcula el ángulo faltante:

$$(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1$$

$$\cos \alpha = (1 - (\cos 60)^2 - (\cos 45)^2)^{1/2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \pm 0.50$$

De manera que  $\alpha$  es  $60^\circ$  ó  $120^\circ$ , del cual se toma  $60^\circ$  ya que  $F_x$  esta en la dirección positiva (Plano  $xy$ ).

Usando la fuerza actuante se tiene que:

$$F = F \cos \alpha \mathbf{i} + F \cos \beta \mathbf{j} + F \cos \gamma \mathbf{k}$$

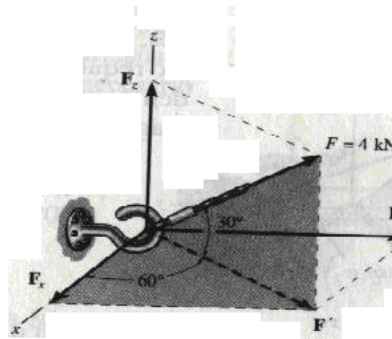
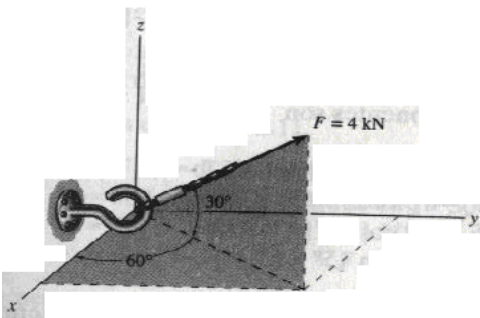
$$F = (200 \cos 60^\circ) \mathbf{i} + (200 \cos 60^\circ) \mathbf{j} + (200 \cos 45^\circ) \mathbf{k}$$

$$F = (100 \mathbf{i} + 100 \mathbf{j} + 141.4 \mathbf{k}) \text{ N}$$

Esta fuerza puede comprobarse de manera que

$$F = ((100^2 + 100^2 + 141.4^2)^{1/2}) = 200 \text{ N}$$

### 3. Expresar la fuerza como vector cartesiano



Los ángulos de  $60^\circ$  y  $30^\circ$  no son ángulos directores ya que están notados desde las proyecciones y no de los ejes. Mediante una aplicación sucesiva de la ley del paralelogramo se podrá obtener las componentes.

$$F' = 4 \cos 30^\circ = 3.46 \text{ kN}$$

$$F_z = 4 \sin 30^\circ = 2 \text{ kN}$$

Luego descomponemos  $F'$

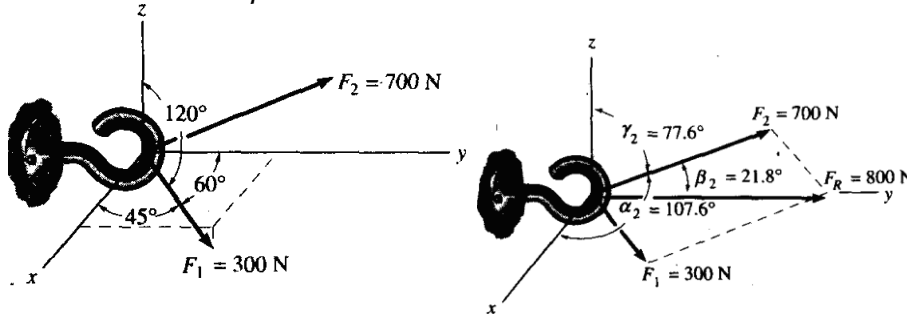
$$F_x = 3.46 \cos 60^\circ = 1.73 \text{ kN}$$

$$F_y = 3.46 \sin 60^\circ = 3 \text{ kN}$$

Por tanto,  $F = (1.73 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k})$



4. Determine los ángulos directores de  $F_2$  si la fuerza resultante debe tener un magnitud de 800 N y actuar en la dirección positiva de Y.



$$F_R = F_1 + F_2$$

$$F_R = (0 \text{ i} + 800 \text{ j} + 0 \text{ k}) \text{ N}$$

$$F_1 = F_1 U_{F1} = (300 \cos 45^\circ \text{ i} + 300 \cos 60^\circ \text{ j} + 300 \cos 120^\circ \text{ k}) \text{ N}$$

$$F_1 = (212.1 \text{ i} + 150 \text{ j} - 150 \text{ k}) \text{ N}$$

$$F_2 = F_2 U_{F2} = F_{2x} \text{ i} + F_{2y} \text{ j} + F_{2z} \text{ k}$$

Sabemos que las componentes de la resultante son la suma de las fuerzas actuantes por tanto:

$$0 \text{ i N} = 212.1 \text{ i} + F_{2x} \text{ i} \quad \text{de donde, } F_{2x} = -212.1 \text{ N}$$

$$800 \text{ j N} = 150 \text{ j} + F_{2y} \text{ j} \quad \text{de donde, } F_{2y} = 650 \text{ N}$$

$$0 \text{ k N} = -150 \text{ k} + F_{2z} \text{ k} \quad \text{de donde, } F_{2z} = 150 \text{ N}$$

De manera lógica resulta que:

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha \quad \text{Sustituyendo y despejando } \alpha = 108^\circ$$

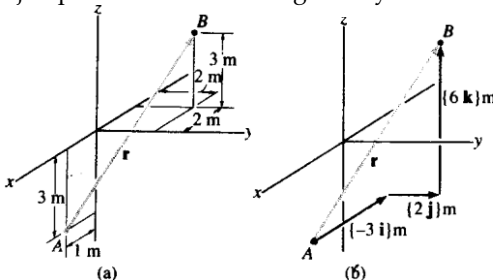
$$F_{2y} = F_2 \cos \beta \quad \text{Sustituyendo y despejando } \beta = 21.8^\circ$$

$$F_{2z} = F_2 \cos \gamma \quad \text{Sustituyendo y despejando } \gamma = 77.6^\circ$$

### Vectores de posición

Los puntos en el espacio se hacen referentes al origen de las coordenadas. Un vector de posición se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio respecto a otro. Este podrá ser expresado de manera vectorial como  $r = xi + yj + zk$ . El vector de posición entre dos puntos AB se calcula por la expresión:  $R_{AB} = (X_B - X_A)i + (Y_B - Y_A)j + (Z_B - Z_A)k$

Ejemplo. Determine la magnitud y dirección del vector de posición que se extiende de A a B.



Las coordenadas de los puntos son: A (1,0,-3) m B (-2,2,3) m  
 Dando  $r = (-2-1)i + (2-0)j + (3-(-3))k = (-3i+2j+6k) \text{ m}$

La magnitud del vector de posición será:  $r = ((X_i)^2 + (Y_j)^2 + (Z_k)^2)^{1/2}$   
 $r = (9 + 4 + 36)^{1/2} = 7 \text{ m}$

Formulando un vector unitario en la dirección de r se tendrá:



$u = r/r$  \*  $r$  indica su magnitud  
 $u = (-3/7 i + 2/7 j + 6/7 k)$

Las componentes del vector unitario proporcionan los ángulos directores resultando:

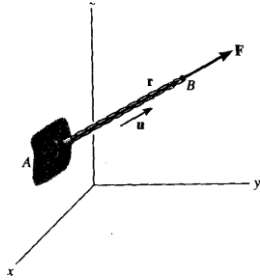
$\alpha = \text{Cos}^{-1}(-3/7) = 115^\circ$

$\beta = \text{Cos}^{-1}(2/7) = 73.4^\circ$

$\gamma = \text{Cos}^{-1}(6/7) = 31^\circ$

\* Note que los ángulos se miden desde un sistema de coordenadas localizadas en el punto inicial.

**Vector de fuerza dirigido a lo largo de una línea recta.**

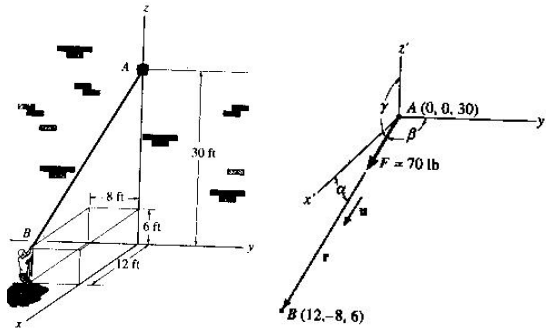


$F = F U$

$F = F (r/r)$   $r$  es la magnitud del vector

Ejemplos

1. El hombre de la figura esta tirando con una fuerza de 70 lb. Muestre esta fuerza como vector cartesiano.



$A (0,0,30) B (12,-8,6)$

$r = (12 i - 8 j - 24 k)$  ft

La magnitud de  $r$  será:  $r = ((12)^2 + (-8)^2 + (-24)^2)^{1/2} = 28$  ft

El Vector unitario será:

$u = r/r$

$u = 12/28 i - 8/28 j - 24/28 k$

El vector fuerza será:  $F = Fu = 70 \text{ lb} (12/28 i - 8/28 j - 24/28 k)$

$F = (30 i - 20 j - 60 k)$  lb

Los ángulos de dirección serán:

$\alpha = \text{Cos}^{-1}(12/28) = 64.6^\circ$

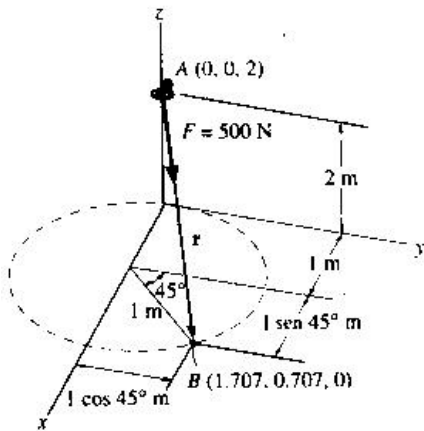
$\beta = \text{Cos}^{-1}(-8/28) = 107^\circ$

$\gamma = \text{Cos}^{-1}(-24/28) = 149^\circ$

(\* Los ángulos son a partir del vector de posición ya que la fuerza actúa en esa misma dirección)



2. Expresar la fuerza de 500 N actuante sobre el gancho mostrado de manera cartesiana



$$A(0,0,2) \quad B(1.707, 0.707, 0)$$

$$r = (1.707 i + 0.707 j - 2 k) \text{ m}$$

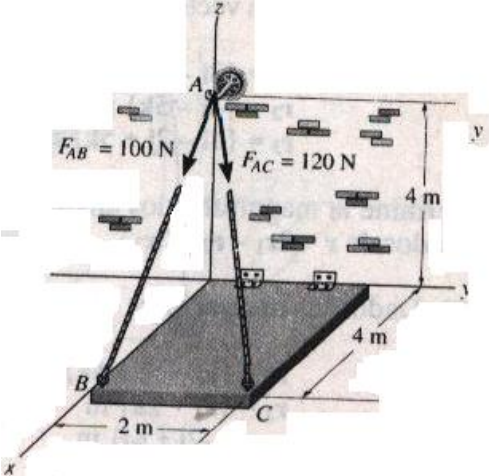
$$r = 2.27 \text{ m}$$

$$\text{Vector unitario} = r/r = (1.707/2.27 i + 0.707/2.27 j - 2/2.27 k)$$

$$u = 0.627 i + 0.260 j - 0.735 k$$

El vector fuerza será:  $F = Fu = 500 \text{ N} (0.627 i + 0.260 j - 0.735 k)$   
 $F = (314 i + 130 j - 368 k) \text{ N}$

3. Determine la magnitud de la fuerza resultante actuante en el gancho A si la  $F_{AB} = 100 \text{ N}$  y  $F_{AC} = 120 \text{ N}$ .



Lo que debemos hacer es determinar cada fuerza actuante de manera cartesiana y luego determinar el vector resultante. Así que  
 $r_{AB} = (4-0) i + (0-0)j + (0-4) K$   
 $r_{AB} = (4 i - 4 k) \text{ m}$

$$r_{AB} = 5.66 \text{ m}$$

$$F_{AB} = 100 \text{ N} (r_{AB} / r_{AB})$$

$$F_{AB} = (70.7 i - 70.7 k) \text{ N}$$

$$r_{AC} = (4-0) i + (2-0)j + (0-4) K$$

$$r_{AC} = (4 i + 2j - 4 k) \text{ m}$$

$$r_{AC} = 6 \text{ m}$$

$$F_{AC} = 120 \text{ N} (r_{AC} / r_{AC})$$

$$F_{AC} = (80 i + 40 j - 150.7 k) \text{ N}$$

$$FR = F_{AB} + F_{AC}$$

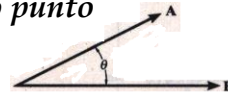
$$FR = ((70.7 i - 70.7 k) + (80 i + 40 j - 150.7 k)) \text{ N}$$

$$FR = 150.7 i + 40 j - 150.7 k$$

La magnitud será:  $FR = ((150.7)^2 + (40)^2 + (-150.7)^2) = 217 \text{ N}$



**Producto escalar o producto punto**



Este es un método particular de multiplicar vectores.

De manera general en forma de ecuación es  $A \cdot B = AB \cos \theta$

En términos de vectores cartesianos el producto punto se multiplican las componentes correspondientes a X, Y y Z y se suman estos productos algebraicamente.

$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  ; este resultado será un escalar y no un vector

**Aplicaciones**

1. Determinar el ángulo formado entre dos rectas con un punto común.

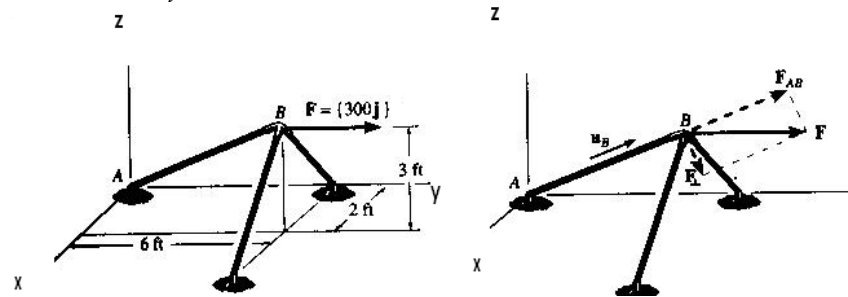
$$\theta = \text{Cos}^{-1} \{ (A \cdot B) / (AB) \}$$

2. Las componentes paralelas y perpendiculares de un vector respecto a una recta dada.

$$A_{//} = A \cos \theta = A \cdot u$$

$$A_{\perp} = A - A_{//}$$

**Ejemplo.** Determine una componente paralela y otra perpendicular al elemento AB si la fuerza actuante es de 300 N de forma horizontal



$$u_{AB} = u = r_{AB} / r_{AB}$$

$$u_{AB} = (2i + 6j + 3k) / (4 + 36 + 9)^{1/2}$$

$$u_{AB} = 0.286 i + 0.875 j + 0.429 k$$

La magnitud de la componente paralela será:  $F_{//} = F \cdot u$

$$F_{//} = (0i + 300 j + 0 k) \cdot (0.286 i + 0.875 j + 0.429 k)$$

$$F_{//} = 257.1 \text{ N}$$

Si se expresa de manera vectorial

$$F_{AB} = F_{AB} u_{AB}$$

$$F_{AB} = 257.1 (0.286 i + 0.875 j + 0.429 k) \text{ N}$$

$$F_{AB} = (73.5 i + 220 j + 110 k) \text{ N}$$

La componente perpendicular será  $F_{\perp} = F - F_{//}$

$$F_{\perp} = (0i + 300 j + 0 k) - (73.5 i + 220 j + 110 k)$$

$$F_{\perp} = (-73.5 i + 80 j - 110 k) \text{ N}$$

La magnitud de la componente perpendicular será:  $F_{\perp} = ((-73.5)^2 + (80)^2 + (-110)^2)^{1/2}$

$$F_{\perp} = 155 \text{ N}$$



### Equilibrio de partículas

Una partícula está en equilibrio siempre y cuando su estado sea de reposo, si originalmente estaba en reposo, o tenga velocidad constante, si originalmente estaba en movimiento. Lo más usual, sin embargo es decir que está en “equilibrio”, o más específicamente, en “equilibrio estático” tratándose de un objeto en reposo. Para mantener un estado de equilibrio, es necesario satisfacer la primera ley de movimiento de Newton, que afirma que si la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es cero, entonces la partícula está en equilibrio. Esta condición se puede enunciar matemáticamente como  $\sum F = 0$ .

Donde  $\sum F$  es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

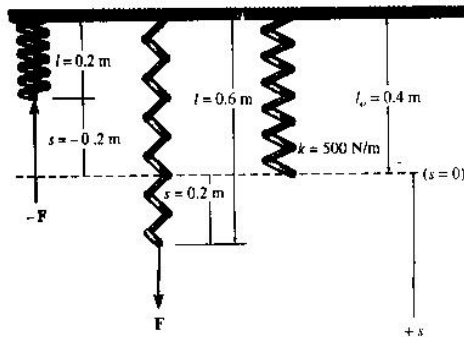
#### El diagrama de cuerpo libre (DCL)

Dos tipos de conexiones frecuentes en los problemas de equilibrio de partículas son:

**Resortes:** Si se usa como soporte un resorte elástico lineal, la longitud del resorte cambiará en proporción directa con la fuerza que actúe en el mismo

$$F = k s$$

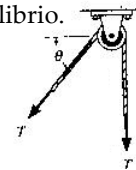
Nótese que se  $S$  determina por la diferencia entre la longitud del resorte deformado y la longitud del resorte no deformado  $l_0$ . Si  $S$  es positiva la fuerza tira contrario la fuerza empuja.



Por ejemplo el resorte de la figura tiene una longitud indeformada  $l_0 = 0.40 \text{ m}$  y una constante de elasticidad  $k = 500 \text{ N/m}$ . Para estirar el resorte de modo que  $l$  sea de  $0.6 \text{ m}$  se requiere una fuerza de  $F = kS$ ;  $F = (500 \text{ N/m} * (0.6 \text{ m} - 0.40 \text{ m}))$   $F = 100 \text{ N}$ . Así para comprimirlo a una longitud de  $0.2 \text{ m}$   $F = -100 \text{ N}$ .

**Cables y poleas:** un cable solo puede soportar una tensión o fuerza “tirante” y esta fuerza actúa siempre en la dirección del cable. La fuerza de tensión desarrollada en un cable continuo que pasa por una polea sin fricción debe tener magnitud constante para mantener el cable en equilibrio.

Así un cable estará sujeto a tensión en toda su longitud.



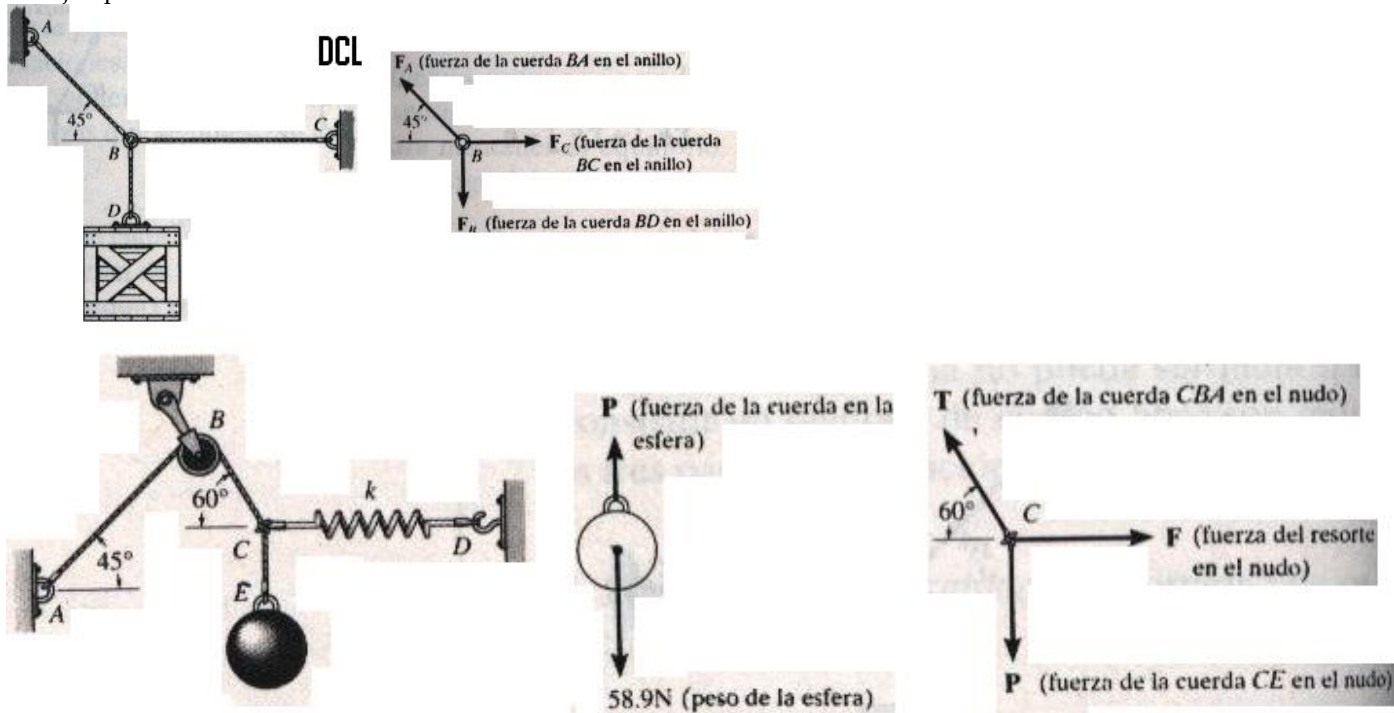
#### Como hacer el diagrama de cuerpo libre?

1. Imagine la articulación aislada.
2. Indica todas las fuerzas actuantes en ella.
3. Las fuerzas no conocidas se pondrán en su dirección correcta. (Por definición la magnitud siempre es positiva por lo que si la solución da un escalar negativo el sentido es contrario)





Por ejemplo a continuación se muestra el DCL de dos sistemas:



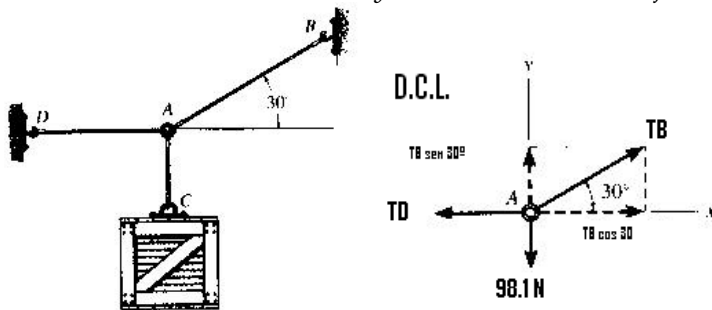
Las ecuaciones que deberán cumplirse para el equilibrio son:

$$\sum F_x = 0 \text{ (Derecha Positivo)}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (Arriba Positivo)}$$

Ejemplos

Determine tensión en cuerdas AB y AD. Si la masa de la caja es 10 Kg.



El peso de la caja será  $W = mg = 9.81 \text{ m/S}^2 * 10 \text{ Kg} = 98.1 \text{ N}$

$$\sum F_x = 0$$

$$T_B \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_B \sin 30^\circ - 98.1 = 0 \quad (2)$$

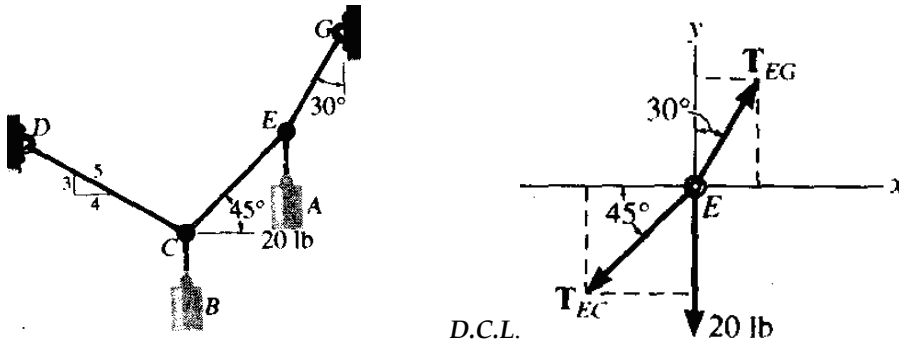
Resolviendo Ecuación 2 y sustituyendo en dos obtenemos que:

$$T_B = 196 \text{ N}$$

$$T_D = 170 \text{ N}$$



Si el cilindro en A en la figura 3.7a tiene un peso de 20 lb determine el peso del cilindro en B y la fuerza en cada cuerda requerida para mantener el sistema en la posición de equilibrio



D.C.L.

Ya que se conoce el peso de A, se determinarán primero las tensiones desconocidas en las cuerdas EG y EC. Comenzando por el anillo E, aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$T_{EG} \sin 30^\circ - T_{EC} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{EG} \cos 30^\circ - T_{EC} \sin 45^\circ - 20 = 0 \quad (2)$$

Tenemos un sistema de dos variables y dos incógnitas el cual se resuelva por cualquier método (Igualación, sustitución y reducción), obteniendo que

$$T_{EC} = 38.6 \text{ lb.}$$

$$T_{EG} = 54.6 \text{ lb.}$$

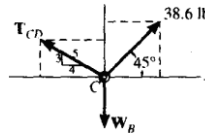
Usando el resultado calculado  $T_{EC}$  puede investigarse el equilibrio del anillo en C. Aplicando el principio de la tercera ley de Newton que la acción es igual pero opuesta a la reacción. Aplicando ecuaciones:

$$\sum F_x = 0$$

$$38.6 \cos 45^\circ - (4/5 T_{CD}) = 0 \quad (3)$$

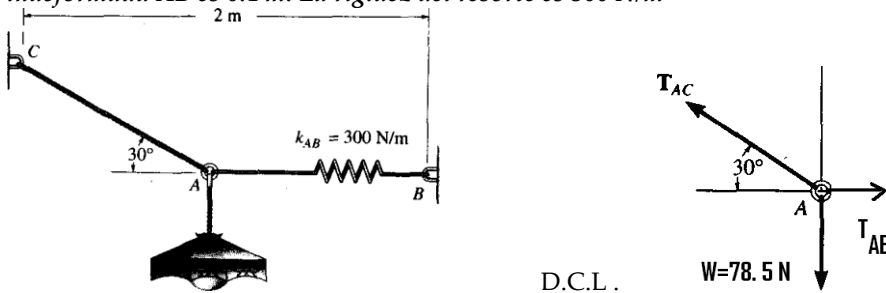
$$\sum F_y = 0$$

$$(3/5) T_{CD} + 38.6 \sin 45^\circ - W_B = 0 \quad (4)$$



Resolviendo obtenemos que  $T_{CD} = 34.1 \text{ lb.}$   $W_B = 47.8 \text{ lb}$

Determine longitud AC, si la lámpara de masa 8 Kg este suspendida tal y como se muestra. Longitud indeformada AB es 0.4 m. La rigidez del resorte es 300 N/m



D.C.L.

El peso es  $mg$  por tanto  $W = (8 \text{ Kg} * 9.81 \text{ m/s}^2) = 78.5 \text{ N}$

Aplicando ecuación de equilibrio

$$\sum F_x = 0$$



$$T_{AB} - T_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{AC} \sin 30^\circ - 78.5 = 0$$

Resolviendo tenemos:

$$T_{AC} = 157 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 136 \text{ N}$$

El estiramiento del resorte AB es por tanto  $T_{AB} = K_{AB}S_{AB}; 136 \text{ N} = 300 \text{ N/m} (S_{AB}); S_{AB} = 0.453 \text{ m}$

De modo que la longitud extendida deberá ser:

$$l_{AB} = l' + S_{AB}; \quad l_{AB} = 0.4 \text{ m} + 0.453 \text{ m} = 0.853 \text{ m}$$

La distancia Horizontal de C a B requiere  $2 \text{ m} = l_{AC} \cos 30^\circ + 0.853; l_{AC} = 1.32 \text{ m}$

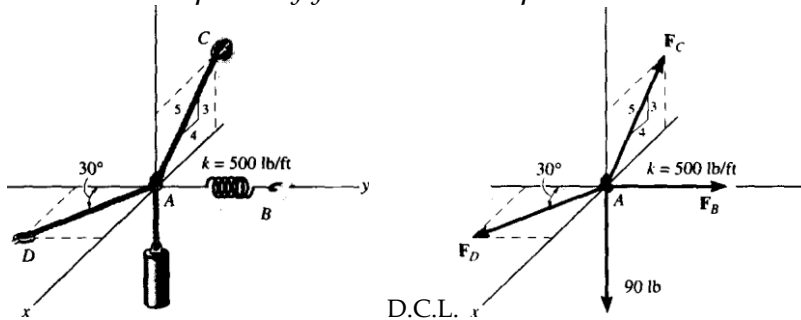
### Sistema de fuerzas en tres dimensiones

El procedimiento de análisis es igual que en dos dimensiones, con la diferencia que ahora deberá considerarse el equilibrio en el eje z, debe cumplirse que la sumatoria de todas las fuerzas sea igual a cero de modo que:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ y } \sum F_z = 0.$$

A continuación se muestran los siguientes ejemplos:

*El cilindro de 90 lb que se muestra en la figura sostenido por dos cables y un resorte de rigidez  $k = 500 \text{ lb/ft}$  Determine la fuerza en los cables y el alargamiento del resorte para que haya equilibrio. El cable AD se encuentra plano x-y y el cable AC en el plano x-z.*



Determinemos las fuerzas para después determinar el alargamiento del resorte. Aplicando las ecuaciones tenemos que:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_D \sin 30^\circ - 4/5 F_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_D \cos 30^\circ + F_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0$$

$$3/5 F_C - 90 \text{ lb} = 0 \quad (3)$$

Resolviendo ecuación 3, sustituyendo en 1 y luego en 2, obtenemos que:

$$F_C = 150 \text{ lb}$$

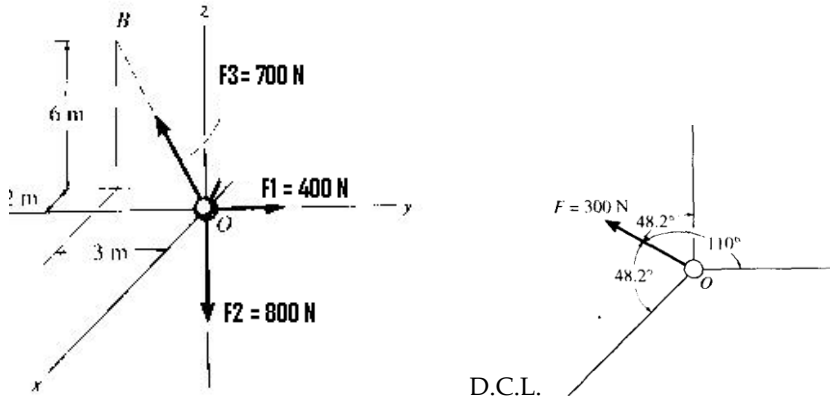
$$F_D = 240 \text{ lb}$$

$$F_B = 208 \text{ lb}$$



El alargamiento del resorte será por tanto,  $F_B = K S_{AB}$ ;  $208 \text{ lb} = 500 \text{ lb/ft} (S_{AB}); S_{AB} = 0.416 \text{ ft}$

Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza  $F$  en la figura, que se requieren para el equilibrio de la partícula  $O$



Aplicando ecuaciones de equilibrio  $\sum F = 0$ ;  
 $F_1 + F_2 + F_3 + F = 0$

Expresando cada fuerza de forma cartesiana notamos que las coordenadas de B son B(-2,-3,6) obtenemos:

$$F_1 = (400 \text{ j}) \text{ N}$$

$$F_2 = (-800 \text{ k}) \text{ N}$$

$$F_3 = F_3 U = F_3 (r_3/r_3) = 700 \text{ N} \{ (-2\text{i} - 3\text{j} + 6\text{k}) / (-2^2 + -3^2 + 6^2)^{1/2} \}$$

$$F_3 = (-200 \text{ i} - 300 \text{ j} + 600 \text{ K}) \text{ N}$$

$$F = F_x \text{ i} + F_y \text{ j} + F_z \text{ k}$$

Sustituyendo;

$$400 \text{ j} - 800 \text{ k} - 200 \text{ i} - 300 \text{ j} + 600 \text{ K} + F_x \text{ i} + F_y \text{ j} + F_z \text{ k} = 0$$

Igualando las componentes tenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$-200 + F_x = 0; \quad F_x = 200 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$400 - 300 + F_y = 0; \quad F_y = -100 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$-800 + 600 + F_z = 0; \quad F_z = 200 \text{ N}$$

$$F = (200\text{i} - 100\text{j} + 200\text{K}) \text{ N}$$

La magnitud de F sera  $(200^2 + 100^2 + 200^2)^{1/2} = 300 \text{ N}$

$$U_F = F/F \text{ (F es la magnitud de la fuerza)}$$

$$U_F = (200/300 \text{ i} - 100/300 \text{ j} + 200/300 \text{ K})$$

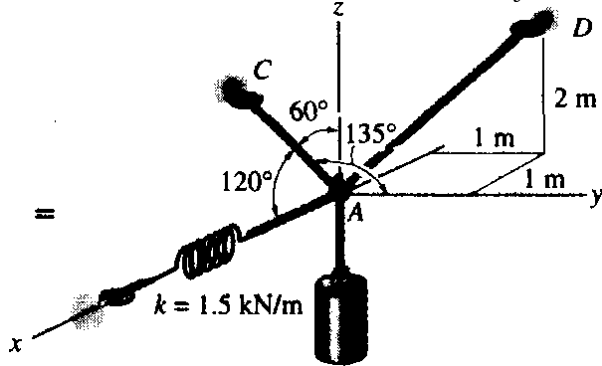
$$\alpha = \text{Cos}^{-1}(200/300) = 48.2^\circ$$

$$\beta = \text{Cos}^{-1}(-100/300) = 110^\circ$$

$$\gamma = \text{Cos}^{-1}(200/300) = 48.2^\circ$$



El cilindro de 100 kg de la figura está sostenido por tres cuerdas, una de las cuales está unida a un resorte. Determine la tensión en cada cuerda y el alargamiento del resorte.



$$\sum F = 0$$

Expresando cada fuerza de manera cartesiana tenemos:

$$F_B = F_B i$$

$$F_C = F_C \cos 120^\circ i + F_C \cos 135^\circ j + F_C \cos 60^\circ k$$

$$F_C = 0.50 F_C i - 0.707 F_C j + 0.50 F_C k$$

$$F_D = F_D [(-i+2j+2k) / (1^2 + 2^2 + 2^2)^{1/2}]$$

$$F_D = -0.333 F_D i + 0.667 F_D j + 0.667 F_D k$$

$$W = m g = -981 \text{ K}$$

Igualando las componentes tenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_B - 0.50 F_C - 0.333 F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-0.707 F_C + 0.667 F_D = 0;$$

$$\sum F_z = 0$$

$$0.50 F_C + 0.667 F_D - 981 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos:

$$F_C = 813 \text{ N}$$

$$F_D = 862 \text{ N}$$

$$F_B = 693.7 \text{ N}$$

Resultando el alargamiento de:

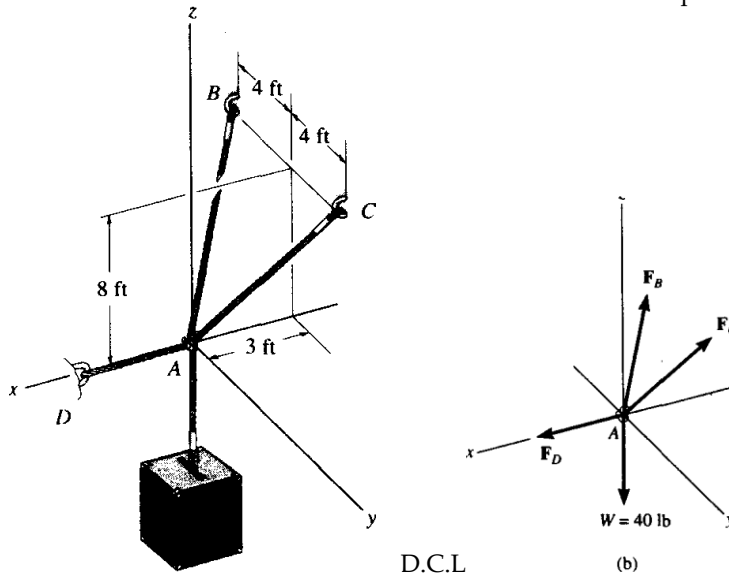
$$F = K S$$

$$693.7 = 1500 S$$

$$S = 0.462 \text{ m.}$$



Determine la fuerza desarrollada en cada uno de los cables que sostiene la caja de 40 lb.



Las coordenadas son B(-3,-3,8) C(-3,4,8)

$$F_B = F_B [(-3i - 4j + 8k) / (3^2 + 4^2 + 8^2)^{1/2}]$$

$$F_B = -0.318 F_B i - 0.424 F_B j + 0.848 F_B k$$

$$F_C = F_C [(-3i + 4j + 8k) / (3^2 + 4^2 + 8^2)^{1/2}]$$

$$F_C = -0.318 F_C i + 0.424 F_C j + 0.848 F_C k$$

$$F_D = F_D i$$

$$W = -40 k$$

Sustituyendo y despejando obtenemos:

$$\sum F_x = 0$$

$$-0.318 F_B - 0.318 F_C + F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-0.424 F_B + 0.424 F_C = 0; \text{ Esta Ecuación afirma que } F_B = F_C$$

$$\sum F_z = 0$$

$$0.848 F_B + 0.848 F_C - 40 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

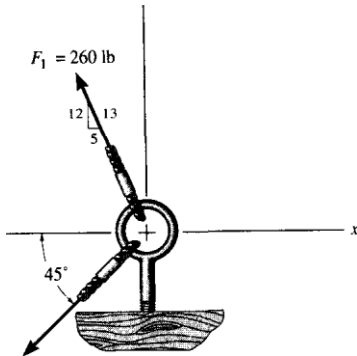
$$F_B = F_C = 23.6 \text{ lb.}$$

$$F_D = 15 \text{ lb.}$$



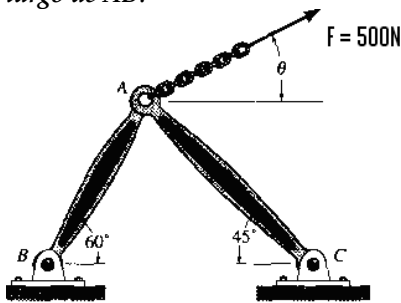
Ejercicios propuestos

Determine la magnitud de la fuerza resultante  $F_r = F_1 - F_2$  y su orientación, medida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje  $x$



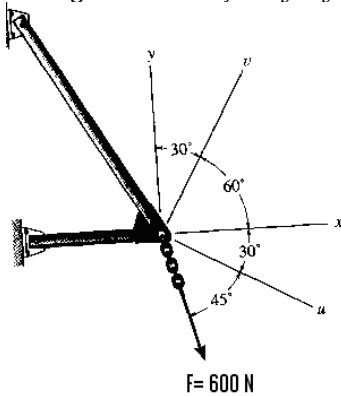
$F_R = 474 \text{ lb}$  y  $\theta = 75.4^\circ$

Determine la orientación de la fuerza de 500 N de manera que cuando la fuerza se resuelva en dos componentes que actúan a lo largo de los miembro AB y AC, la componente de la fuerza a lo largo de AC sea de 300 N con dirección de A a C. ¿Cuál es la magnitud de la componente de fuerza que actúa a lo largo de AB?



$F = 485 \text{ N}$  y  $\theta = 24.6^\circ$

Un cable ejerce una fuerza de 600 N sobre la estructura. Resuelva la fuerza en componentes que actúan a lo largo de (a) los ejes  $c$  y  $v$  y (b) los ejes  $y$ ,  $u$ . ¿Qué magnitud tiene cada componente?



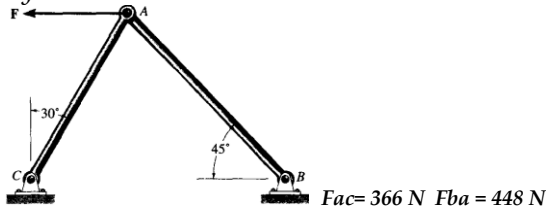
$F = 600 \text{ N}$

a)  $F_x = 490 \text{ N}$ ,  $F_v = 669 \text{ N}$

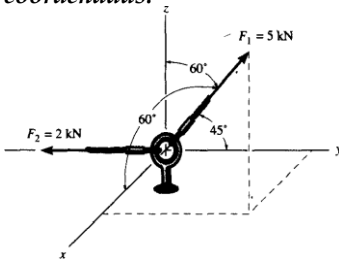
b)  $F_u = 179 \text{ N}$ ,  $F_y = 490 \text{ N}$



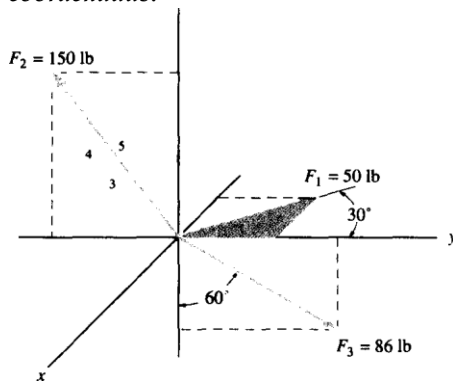
La fuerza horizontal  $F = 500 \text{ N}$  actúa hacia la izquierda en  $A$  sobre la estructura de dos miembros, Determine las magnitudes de las dos componentes de  $F$  dirigidas a lo largo de los ejes de los miembros  $A$   $By$   $AC$



Expresé cada fuerza como vector cartesiano y entonces determine la fuerza resultante  $FR$ . Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante y dibuje el vector en el sistema de coordenadas.

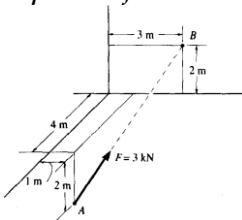


Expresé cada vector como vector cartesiano entonces determine la fuerza resultante  $FR$ . Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante y dibuje el vector en el sistema de coordenadas.



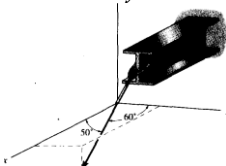
$R/ F1 = (-25 i + 43 j) \text{ lb}$ ,  $F2 = (-90j+120k) \text{ lb}$ ,  $F3 = (74.5 j-43 K) \text{ lb}$   $FR = (-25i+27.8j+77k) \text{ lb}$  ,  $FR = 85.6 \text{ lb}$ ,  $107^\circ$ ,  $71.1^\circ, 25.9^\circ$ .

Expresé la fuerza como un vector cartesiano determine sus ángulos directores coordenados



$R/ F = (-2i+j+2k) \text{ lb}$ ,  $132^\circ, 70.5^\circ, 48.2^\circ$

El cable al final de la viga ejerce una fuerza  $450 \text{ lb}$ , como se muestra. Expresé  $F$  como vector cartesiano.

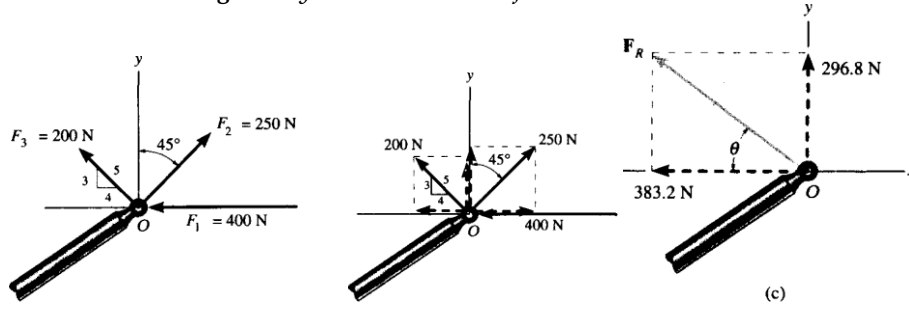


$R/ (289 i + 225 j -261 k) \text{ lb}$



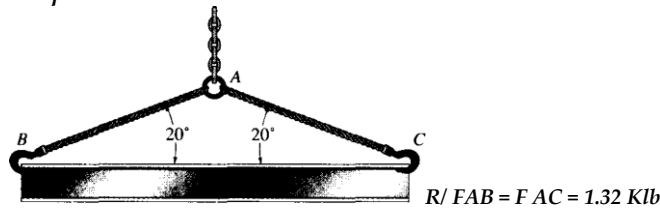


El extremo O del aguilón de la figura 2.20a está sujeto a tres fuerzas concurrentes y coplanares. Determine la magnitud y orientación de la fuerza resultante

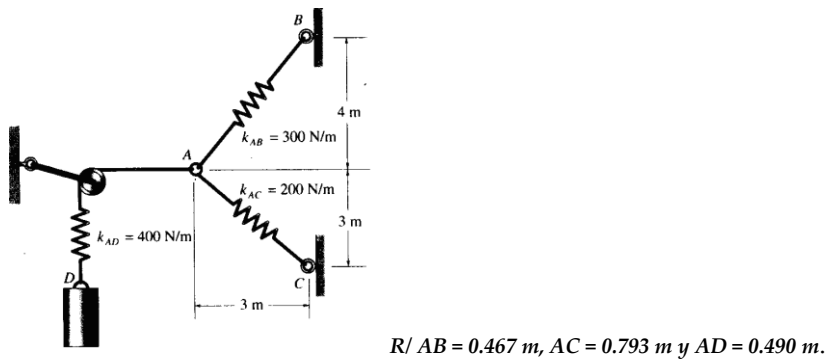


(c)  $R/ FR = 485 \text{ N}, \theta = 37.8^\circ$

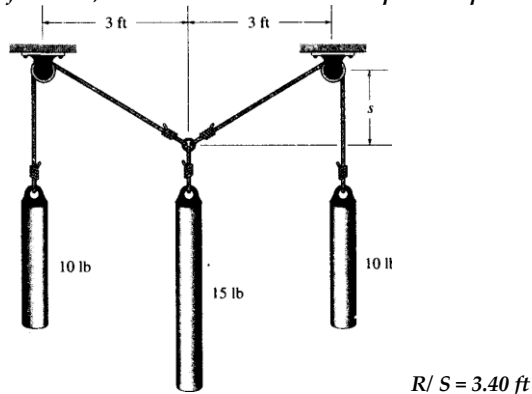
La eslinga sirve para sostener una viga que pesa 900 lb. Determine la fuerza en los cables AB y AC para el equilibrio



Determine el alargamiento de cada resorte para el equilibrio del bloque D cuyo peso es de 20 Kg. Los resortes están en su posición de equilibrio.

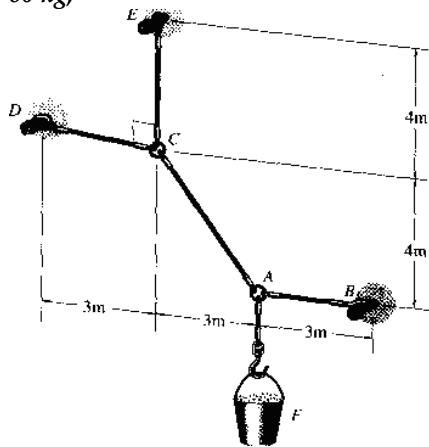


Se colocan tres cargas en las cuerdas ligeras e inextensibles. Si las cuerdas pasan por poleas pequeñas sin fricción, determine la distancia s para la posición de equilibrio.



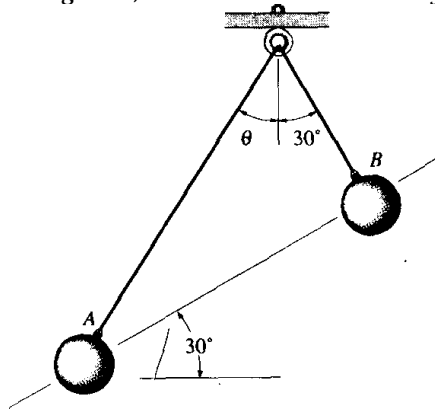


Determine la fuerza que se requiere en cada cuerda para el equilibrio de la cubeta que tiene una masa de 60 kg,



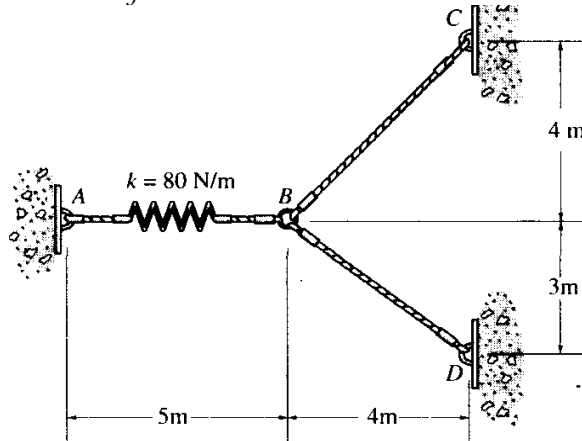
R/  $F_{AF} = 589 \text{ N}$ ,  $F_{AC} = 736 \text{ N}$ ,  $F_{AB} = 441 \text{ N}$ ,  $F_{CE} = 589 \text{ N}$ ,  $F_{CD} = 441 \text{ N}$

Las dos esferas A y B tienen peso igual y están electrostáticamente cargadas de manera que la fuerza de repulsión que actúa entre ellas tiene magnitud de 0.006 lb y se dirige por la línea segmentada. Determine el ángulo  $\theta$ , la tensión en las cuerdas y peso de cada esfera.



R/  $T_B = 0.0104 \text{ lb}$ ,  $W = 0.012 \text{ lb}$ ,  $\theta = 19.1^\circ$ ,  $T_A = 0.0159 \text{ lb}$

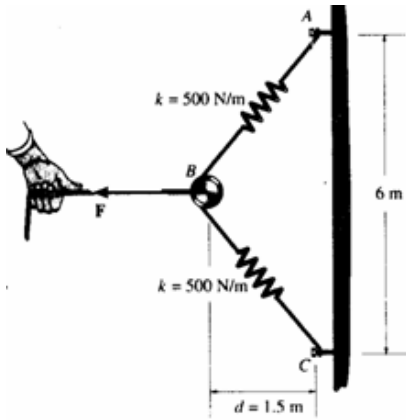
El resorte tiene una rigidez de  $K = 80 \text{ N/m}$  y longitud inextendida de 2 m. Determine la fuerza en los cables BC y BD cuando el resorte sea mantenido en la posición que se muestra.



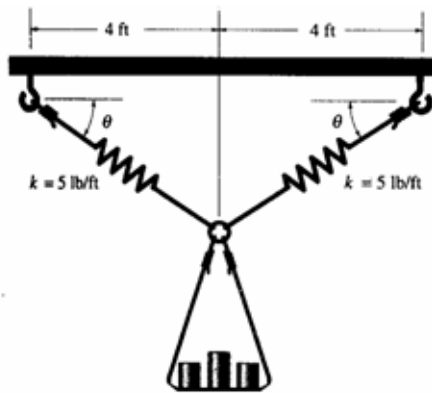
R/  $F_{BD} = 171 \text{ N}$ ,  $F_{BC} = 145 \text{ N}$



La cuerda elástica (o resorte) ABC tiene rigidez de 500 N/m y longitud no extendida de 6 m. Determine la fuerza horizontal  $F$  aplicada a la cuerda, atada a la pequeña polea B, de manera que el desplazamiento de la polea a partir de los soportes sea  $d = 1.5\text{ m}$



El platillo y su contenido puestos en la balanza tienen un peso de 10 lb. Si cada resorte tiene una longitud indeformada de 4 ft y rigidez  $K = 5\text{ lb/ft}$ , determine el ángulo  $\theta$  para el equilibrio.



R/  $43^\circ$