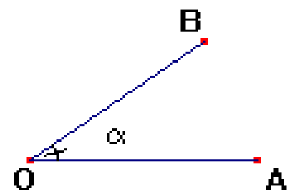
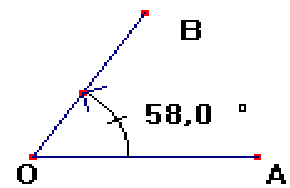
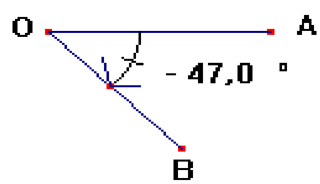
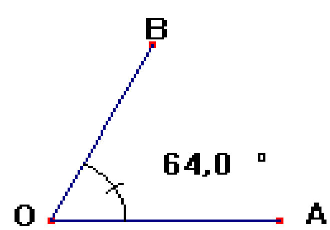
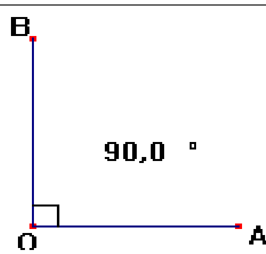
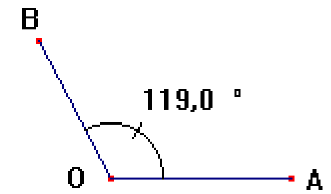
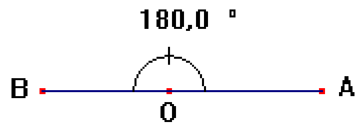
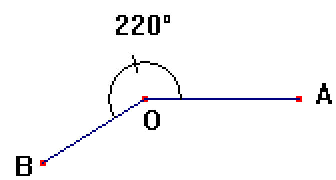
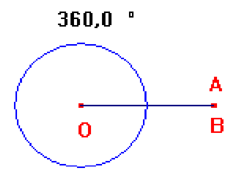
Ángulos.

DEFINICIÓN	FIGURA	OBSERVACIONES
Ángulo. Es la abertura formada por dos semirrectas unidas en un solo punto llamado vértice.		Donde: α = Ángulo O = Vértice OA = Lado inicial OB = Lado terminal
Un ángulo es positivo si su sentido de giro es contrario a las manecillas del reloj.		Observe que se mide en sentido que indica la flecha.
Un ángulo es negativo si su sentido de giro es a favor de las manecillas del reloj.		Observe que su medida en sentido que indica la flecha.

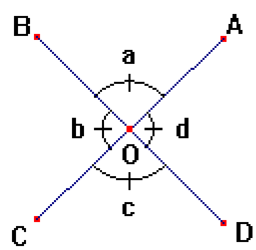
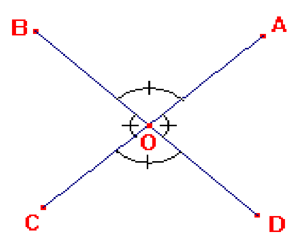
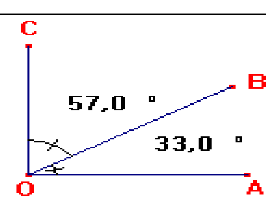
Clasificación de ángulos

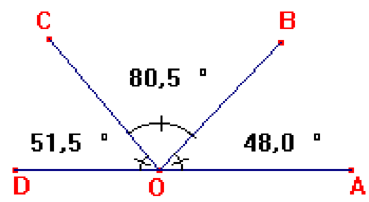
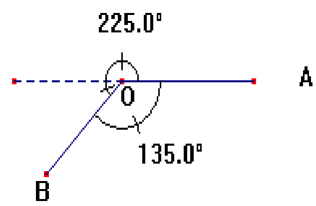
a) Por su magnitud los ángulos se clasifican en:

Nombre y definición	Figura	Característica
Ángulo agudo. Es aquel cuya magnitud es menor de 90º .		AOB < 90º
Ángulo recto: es aquel que mide exactamente 90º . Y se marca con un pequeño rectángulo en el vértice.		AOB = 90º

Ángulo obtuso. Es aquel cuya magnitud es mayor de 90º y menos a 180º .		90º < AOB < 180º
Ángulo colineal o llano. Es aquel cuya magnitud es igual a 180º .		AOB = 180º
Ángulo entrante. Es aquel cuya magnitud es mayor de 180º y menor de 360º .		180º < AOB < 360º
Ángulo perígono. Es aquel cuya magnitud es igual a 360º .		AOB = 360º

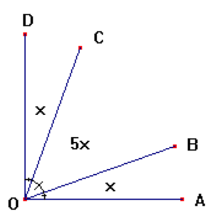
b) Por su posición los ángulos se clasifican en:

Nombre y definición	figura	Observaciones
Ángulos adyacentes. Son los que están formados de manera que un lado es común y los otros lados pertenecen a la misma recta.		Son ángulos adyacentes: a,b ; b,c ; c,d ; d,a
Ángulos opuestos por el vértice. Son dos ángulos que se encuentran uno enfrente de otro al cruzarse dos rectas en un punto llamado vértice.		Ángulos opuestos por el vértice: AOB = COD AOD = BOC
Ángulos Complementarios. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 90°.		AOB + BOC = 90° 33° + 57° = 90°

Ángulos suplementarios. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 180°		AOB+BOC+COD = 180° 48° + 80.5° + 51.5° = 180°
Ángulos conjugados. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 360°		AOB + BOA = 360°

Ejercicio: en las siguientes figuras encontrar el valor de “ x “.

a)

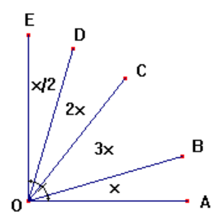


AOB=

BOC=

COD=

b)



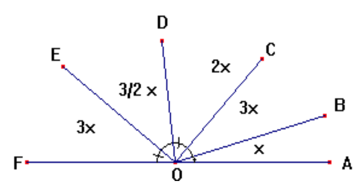
AOB=

BOC=

COD=

DOE=

c)



AOB=

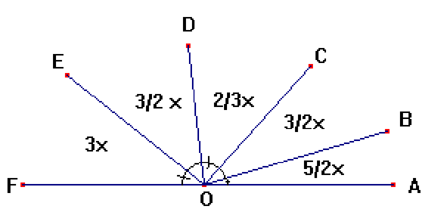
BOC=

COD=

DOE=

EOF=

d)



AOB=

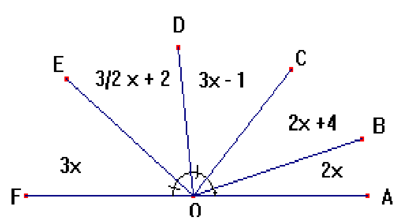
BOC=

COD=

DOE=

EOF=

e)



AOB=

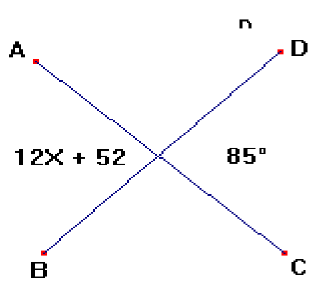
BOC=

COD=

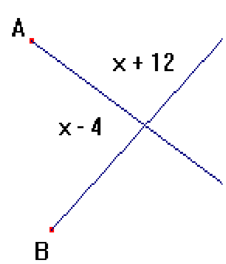
DOE=

EOF=

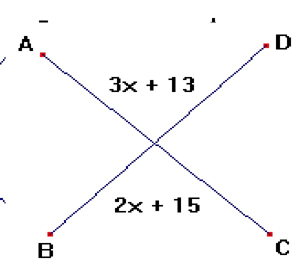
f)

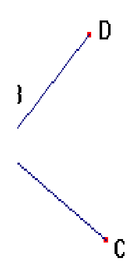


g)



h)

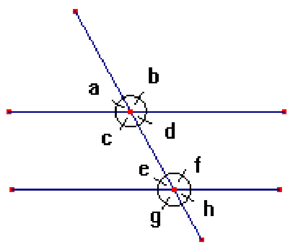




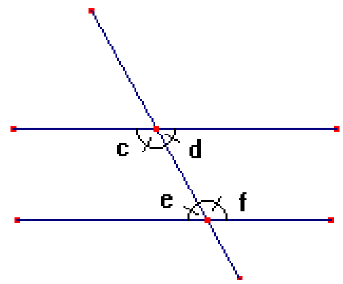
i)

J)

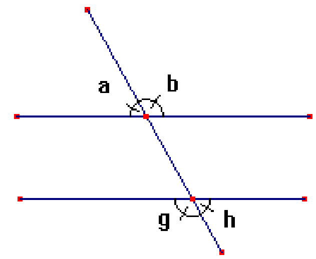
Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante.



Ángulos que se forman



Ángulos internos

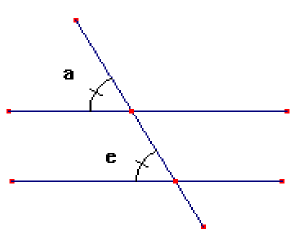


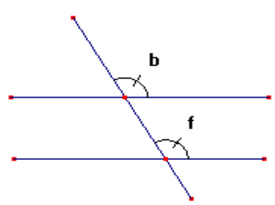
Ángulos externos

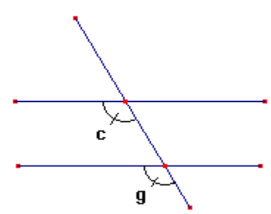
Las paralelas y la secante forman ocho ángulos, de los cuales cuatro son internos por estar situados en el espacio comprendido entre las paralelas; los otro cuatro son externos porque están situados fuera de ese espacio.

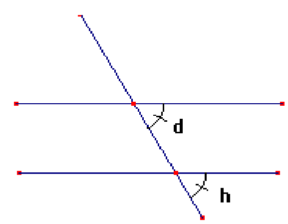
Ángulos consecutivos.

Son ángulos uno interno y otro externo, que están situados uno detrás de otro.





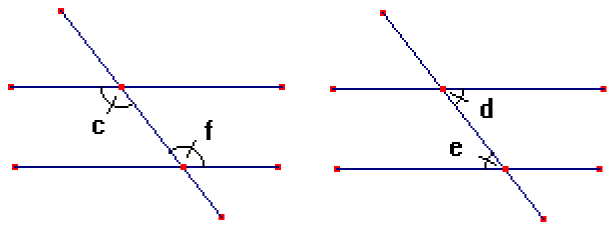




Son consecutivos: a y e; b y f; c y g; d y h. Por lo tanto se concluye que los ángulos consecutivos son iguales entre sí, es decir; a = e , b = f , c = g y d = h.

Ángulos alternos internos.

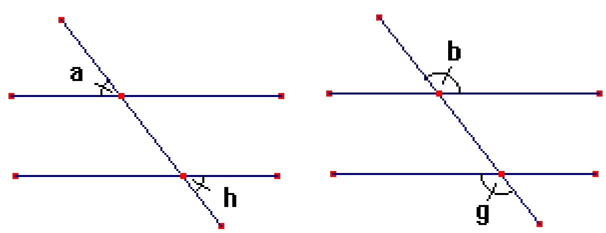
Son dos ángulos internos situados a uno y otro lado de la secante y en distinta paralela.



Son alternos internos los pares de ángulos: c y f; d y e. Si dos paralelas son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son iguales, es decir; c = f y d = e.

Ángulos alternos externos.

Son dos ángulos externos situados a uno y otro lado de la transversal y en distinta paralela.

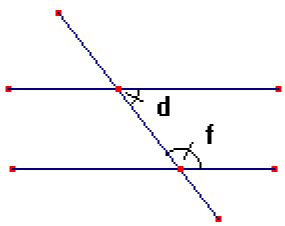


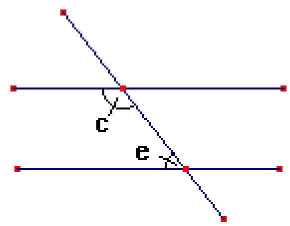
Son alternos externos los pares de ángulos: a y h; b y g. Si dos paralelas son cortadas por una secante, los ángulos alternos externos son iguales, es decir; a = h y b = g.

Ángulos colaterales.

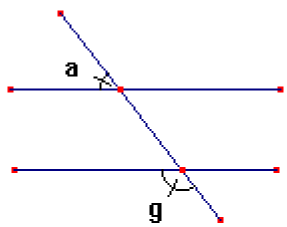
Son dos ángulos internos o dos ángulos externos, situados en un mismo lado de la transversal y en distinta paralela.

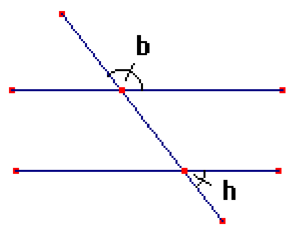
Cuando los dos ángulos son internos, se les llama colaterales internos; si son externos, se les llama colaterales externos.





Son colaterales internos los pares de ángulos: c y e; d y f.

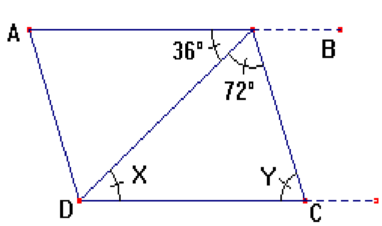




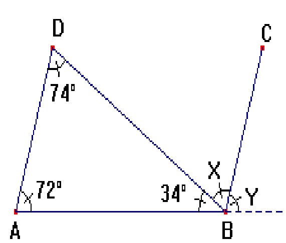
Son colaterales externos los pares de ángulos: a y g; b y h.

Ejercicios: en las siguientes figuras hallar los valores de “X” y de “Y”.

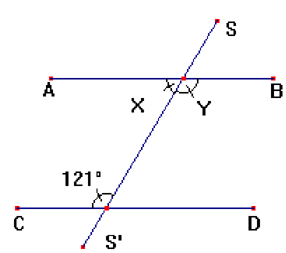
a)



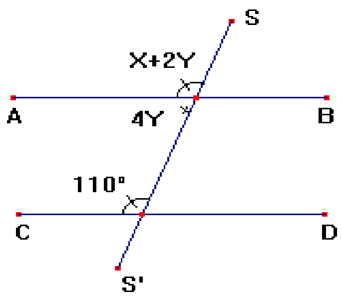
b)



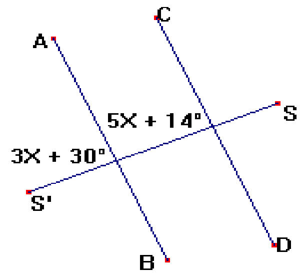
c)



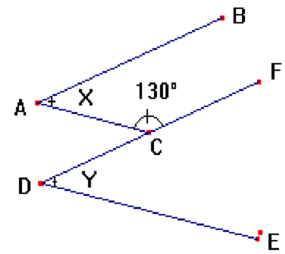
d)



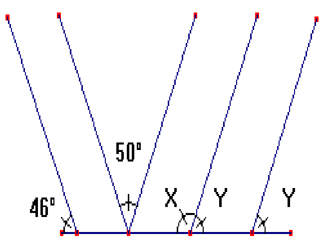
e)



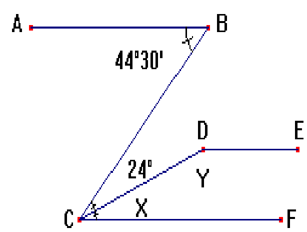
f)



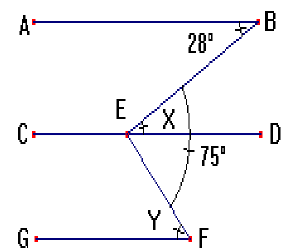
g)



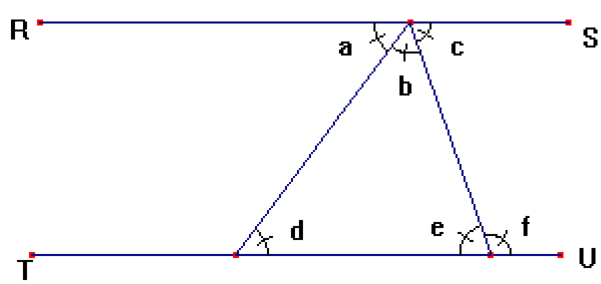
h)



i)



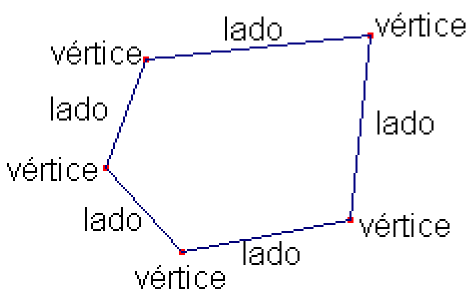
En la siguiente figura, si $\angle f = 110°$ y $\angle a = 53°$ obtener los valores de los ángulos b, c, d, y e. También demostrar que $b + d + e = 180°$

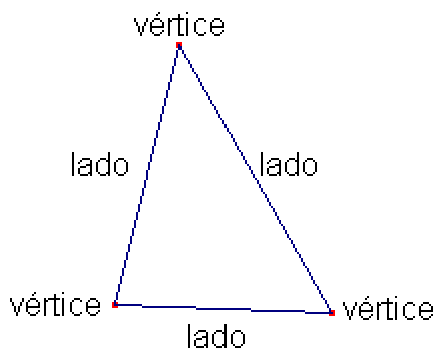


Triángulos.

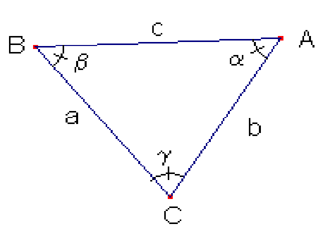
Es un polígono el cual esta limitado por tres lados los cuales forman entre sí tres ángulos, también se puede definir como el plano limitado por tres rectas las cuales se cortan dos a dos.

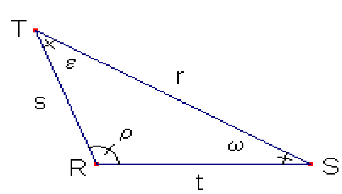
El punto en el cual se unen los puntos o se cruzan las rectas se llaman vértices y los segmentos de recta son conocidos como lados, las partes interiores se llaman ángulos esto lo podemos observar en las siguientes figuras:





Un triángulo se denota colocando tres letras mayúsculas en sus vértices y en los lados opuestos se colocan las letras minúsculas que correspondan en conclusión podemos decir que un triángulo esta compuesto por tres elementos que son: 3 ángulos, 3 lados y tres vértices, lo cual lo podemos observar en las siguientes figuras:



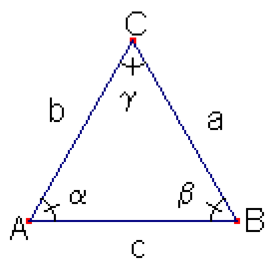


El perímetro de un triangulo lo podemos obtener sumando el valor de sus tres lados.
Los triángulos se pueden clasificar:

1. Por la magnitud de sus lados.
2. Por la magnitud de sus ángulos.

1. Por la magnitud de sus lados tenemos:

Equilátero.- En este tipo de triangulo se observa que sus tres lados tienen la misma magnitud como se observa en la figura.

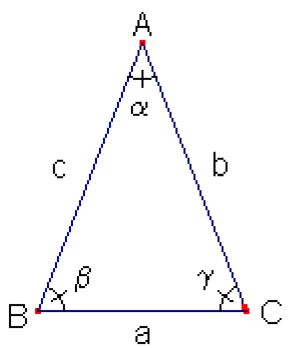


Características:

$a = b = c$ Tres lados iguales

$\angle \alpha = \angle \beta = \angle \gamma$ Tres ángulos interiores iguales

Isósceles.- En este caso dos de sus lados son iguales mientras que el tercer lado es diferente y esto lo podemos observar en la figura siguiente:

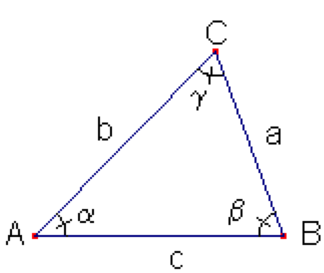


Características:

$a \neq b = c$ Dos lados iguales y uno diferente.

$\angle \alpha \neq \angle \beta = \angle \gamma$ Dos ángulos interiores iguales y uno diferente.

Escaleno.- En este último triángulo la magnitud de sus lados es diferente completamente, esto lo observamos en la figura siguiente:



Características:

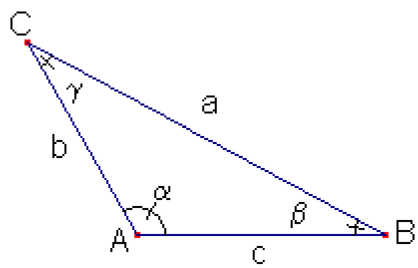
$a \neq b \neq c$ Tres lados diferentes

.

$\angle \alpha \neq \angle \beta \neq \angle \gamma$ Tres ángulos interiores diferentes.

2. Por la magnitud de sus ángulos:

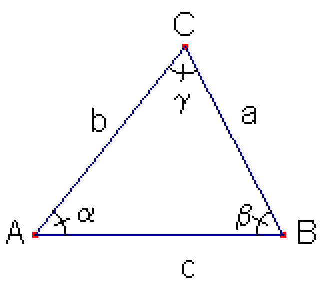
Obtusángulo.- Es aquel que tiene un ángulo obtuso como el observado en la siguiente figura:



Características:

$a \neq b \neq c$ Tres lados diferentes
$\angle \alpha > 90°$ un ángulo mayor de 90°

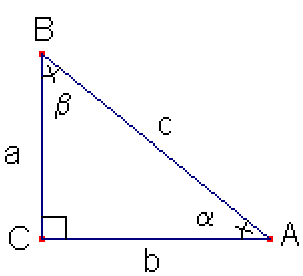
Acutángulo.- es el que tiene sus tres ángulos agudos



Características:

$a \neq b \neq c$ Tres lados diferentes
$\angle\alpha \neq \angle \beta \neq \angle \gamma < 90°$ Tres ángulos diferentes

Rectángulo.- Este tipo de triángulo tiene un ángulo recto (90°), mientras que sus otros dos lados tienen nombres especiales.



Características:

a , b = se llaman catetos, son los lados que forman el ángulo recto.

c = es la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

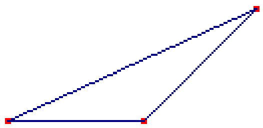
Ejercicios:

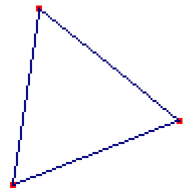
1. Traza correctamente los siguientes triángulos y escribirles todos sus elementos.

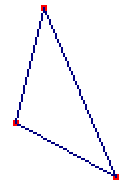
a) Rectángulo.
b) Acutángulo
c) Acutángulo y equilátero
d) Equilátero
e) Obtusángulo y escaleno
f) Isósceles
g) Obtusángulo
h) Rectángulo e isósceles
i) Escaleno

2. Escribe el nombre de cada uno de los siguientes triángulos, según la magnitud de sus lados. También todos sus elementos.

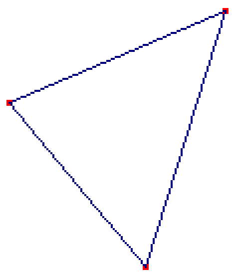
a) Nombre: ____________________ b) ____________________ c) ____________________

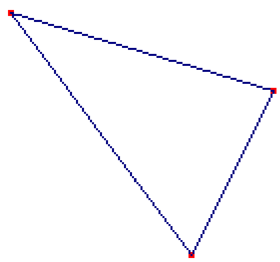


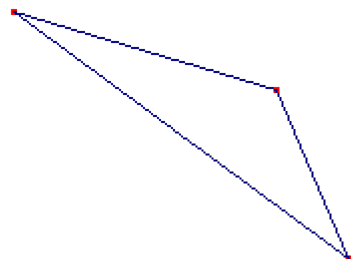




3. Dar el nombre de cada triángulo según la medida de sus ángulos interiores.

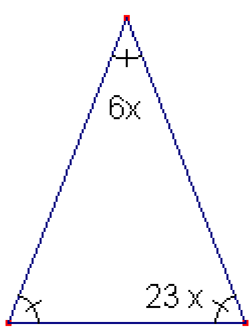




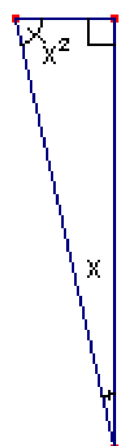


Nombre: ____________________ ____________________ _______________

4. Calcular el valor de "x" en el siguiente Triángulo Isósceles.



5. Calcular el valor de "x" en el siguiente Triángulo rectángulo

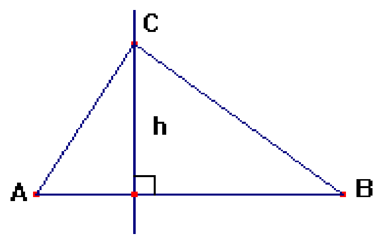


Rectas y puntos notables en un triangulo.

Cualquier triángulo tiene 3 alturas, 3 medianas, 3 mediatrices y 3 bisectrices, que se les llaman rectas notables y al punto donde se unen cada una de las 3 reciben nombres diferentes.

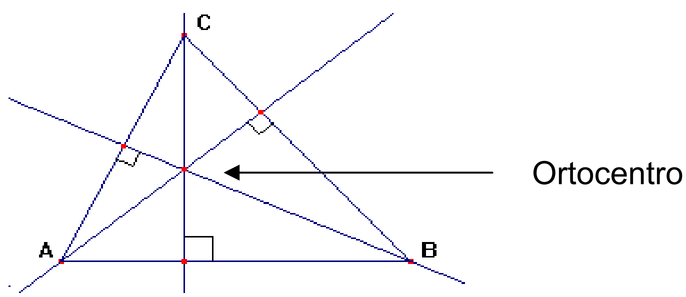
Altura.- segmento de recta perpendicular al lado y que pasa por el vértice opuesto.

Ejemplo:



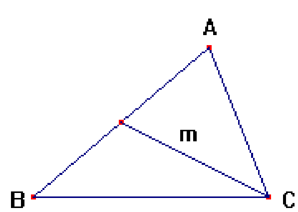
Ortocentro.-Es el punto en el cual las alturas se intersecan o cruzan.

Ejemplo:



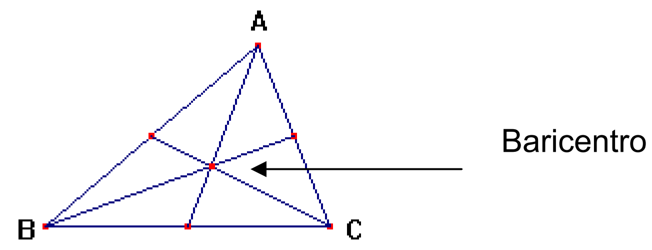
Medianas.-Es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto y se le llama mediana correspondiente a ese lado.

Ejemplo:



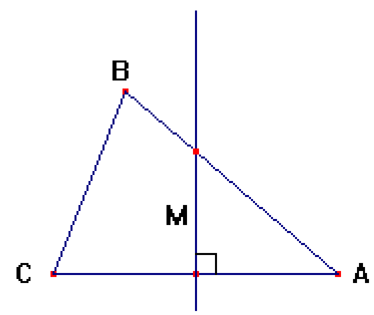
Baricentro.- Es el punto en el cual las medianas se cruzan o intersecan.

Ejemplo:



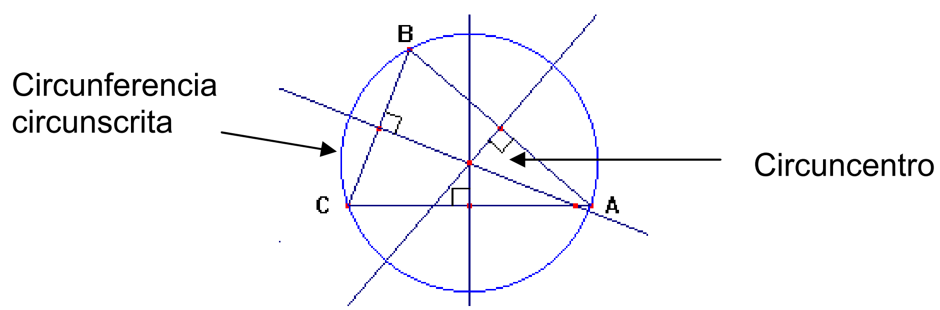
Mediatriz.- Segmento de recta que es perpendicular a cada lado del triángulo y que pasa exactamente por el punto medio.

Ejemplo:



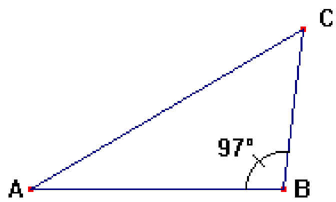
Circuncentro.- Es el punto en donde las mediatrices se cruzan o intersecan y este es el centro de la circunferencia circunscrita.

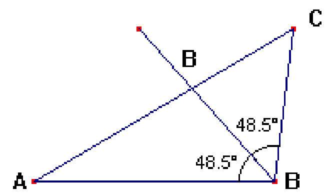
Ejemplo:



Bisectriz.- Segmento de recta que divide cada ángulo del triángulo en dos partes iguales.

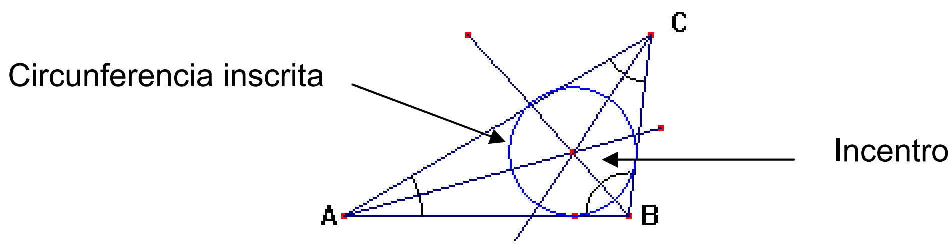
Ejemplo:





Incentro.- Es el lugar en el cual las bisectrices se cruzan o intersecan y este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

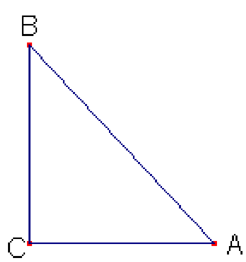
Ejemplo:



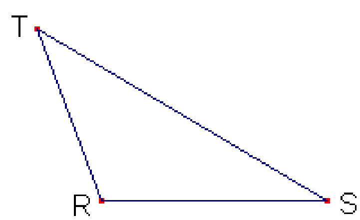
Ejercicios:

1. Trazar las alturas de los siguientes triángulos e identificar las que corresponden a cada lado.

a)

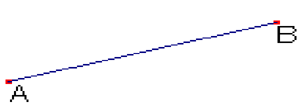


b)

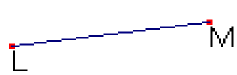


2. Determinar el punto medio de los segmentos.

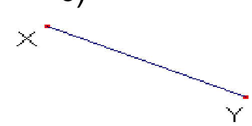
a)



b)

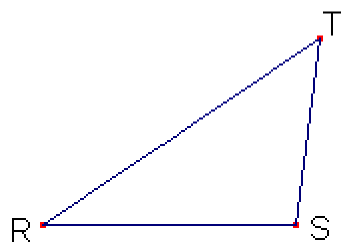


c)

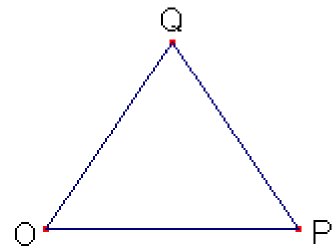


3. Trazar las medianas de los siguientes triángulos e indicarlas.

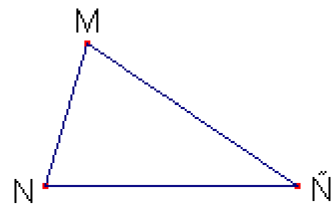
a)



b)

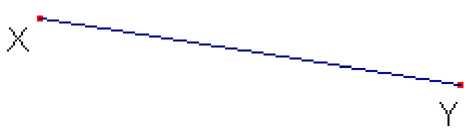


c)

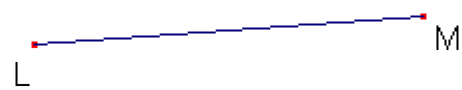


4. Trazar la mediatriz de los siguientes segmentos.

a)

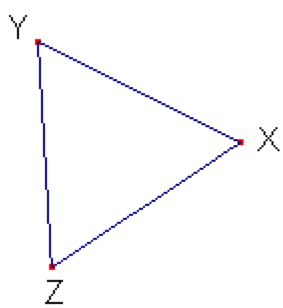


b)

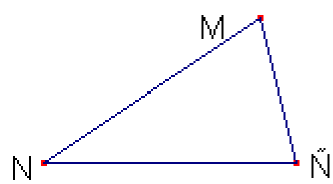


5. Trazar las mediatrices de los siguientes triángulos.

a)

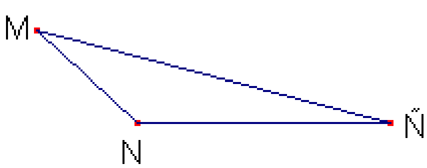


b)

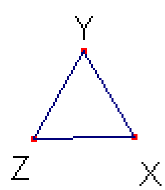


6. Trazar la circunferencia circunscrita a los siguientes triángulos.

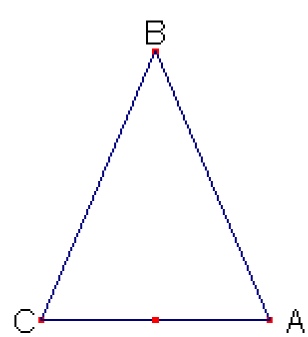
a)



b)

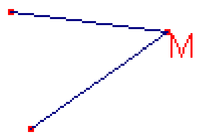


c)

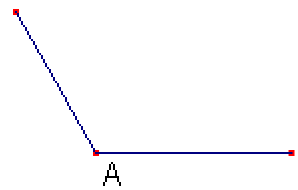


7. Trazar la bisectriz en los siguientes ángulos.

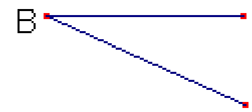
a)



b)

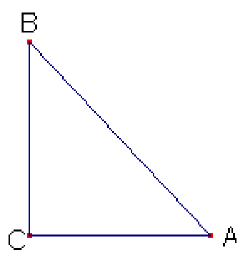


c)

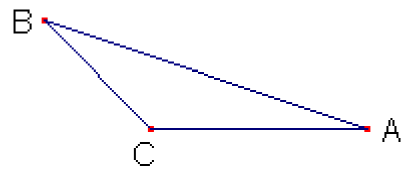


8. Trazar las bisectrices de los siguientes ángulos y la circunferencia inscrita.

a)



b)



Propiedades generales de los triángulos.

Estas se mencionan en base a teoremas como son:

Teorema 1. En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.

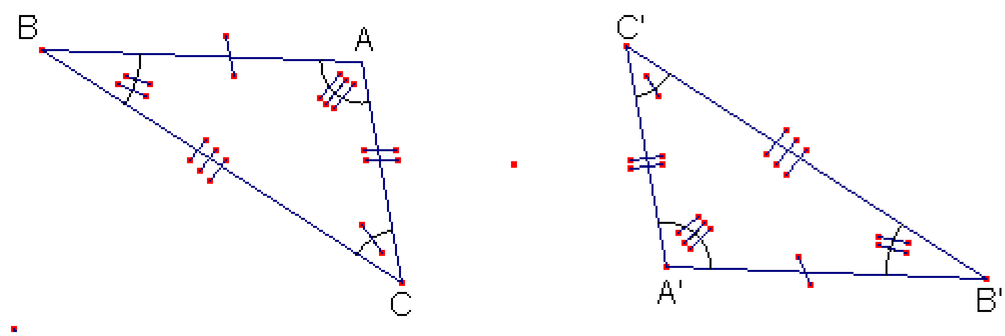
Teorema 2. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

Teorema 3. En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Triángulos congruentes o iguales.

Un triángulo es congruente con otro, o igual a otro si tienen todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos de otros. Para demostrar que dos triángulos son iguales, no es necesario demostrar que sus tres lados y sus tres ángulos sean iguales uno a no, sino que es suficiente con que se cumpla la igualdad de algunos de ellos para que, como consecuencia, los demás resulten también iguales.

En los siguientes triángulos congruentes, los elementos homólogos o correspondientes están señalados con el mismo trazo.



El conjunto de elementos que deben ser iguales da origen, en cada caso a un criterio de igualdad de triángulos, los criterios son:

Primer criterio. Dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente igual, son iguales.

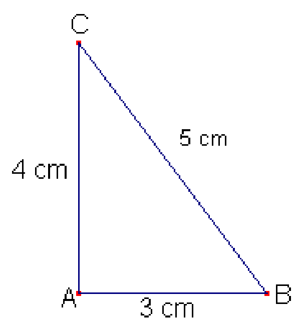
Segundo criterio. Dos triángulos que tienen un lado y dos ángulos igualmente dispuestos respectivamente iguales, son iguales.

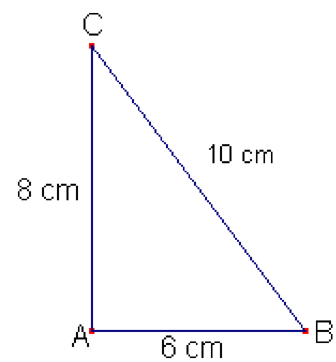
Tercer criterio. Dos triángulos que tienen los tres lados respectivamente iguales, son iguales.

Triángulos semejantes.

Se dice primeramente que dos figuras u objetos son semejantes cuando tienen la misma forma así como ciertas característica, por lo cual al decir que dos triángulos son semejantes es porque tienen sus ángulos respectivamente iguales así como sus lados correspondientes, proporcionales.

Ejemplo.





Para considerar que dos triángulos son semejantes es suficiente que se cumplan algunas condiciones.

Primer caso.- Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

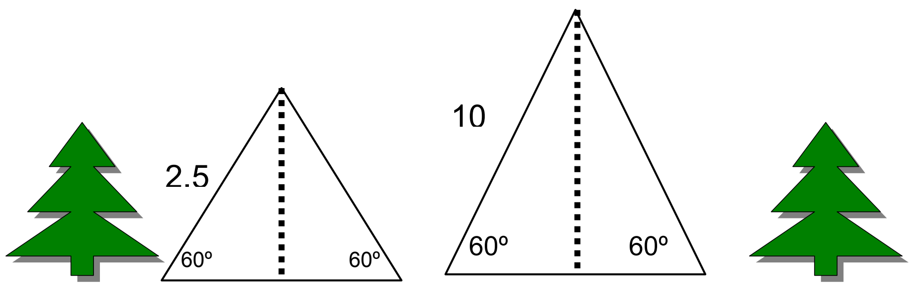
Segundo caso.- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los dos lados que lo forman.

Tercer caso.- Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

Cuarto caso.- Si desde el vértice del ángulo recto de un triangulo se traza una perpendicular hasta la hipotenusa, los triángulos que se forman son semejantes al triangulo dado y semejantes entre sí.

El concepto de semejanza tiene grandes aplicaciones en la vida cotidiana; si alguien busca comprar casa, se dirige a una agencia de bienes raíces en donde le muestra una maqueta con las mismas formas que tiene o tendrá la casa en venta. La dimensión de esta maqueta es proporcional a la original. Los mapas son otro ejemplo de aplicación del concepto de semejanza.

Ejemplo: Una tienda de campaña es colocada junto a otra como te indicamos en la figura.



¿De la siguiente figura, los triángulos representan una semejanza o una congruencia?

Solución:

Al analizar la figura observamos dos ángulos iguales. Por el teorema de los ángulos internos de los triángulos sabemos que el tercer ángulo en ambos triángulos tiene el mismo valor. El valor de los lados nos da idea de que existe una proporción entre ellos, por eso la respuesta de semejanza.