Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Se considera un sistema formado por dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

Método de resolución gráfica

Se basa en la representación gráfica en el plano de los conjuntos de soluciones S_1 y S_2 de cada una de las ecuaciones que componen el sistema, para después buscar los puntos comunes a ellos, es decir, $S_1 \cap S_2$.

En el caso de que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2: Resolver gráficamente el sistema $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases}$

En primer lugar se representa los conjuntos soluciones de cada una de las ecuaciones. En este caso, como el sistema es lineal estos conjuntos S_1 y S_2 son rectas del plano.

Para dibujar la recta S_1 basta conocer dos puntos por los que pasa:

Si tomamos $x = 0$ y sustituimos en la primera ecuación obtenemos $y = -1$.

Si tomamos $x = 1$ y sustituimos en la primera ecuación obtenemos $y = 0$.

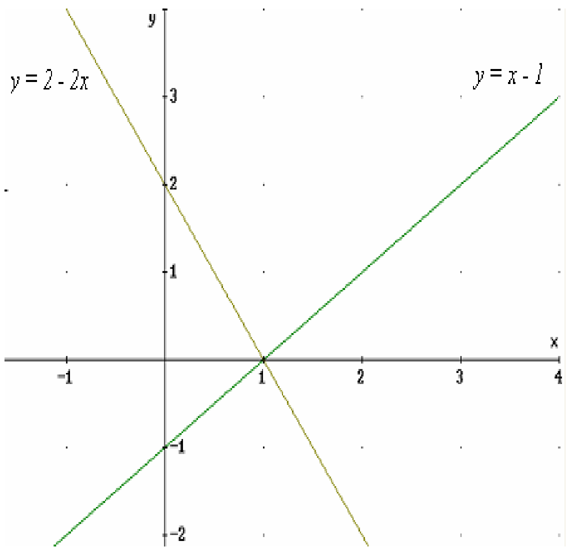
Luego la recta solución de la primera ecuación es la que une los puntos (0, -1) y (1, 0).

Análogamente procedemos para calcular la recta solución de la segunda ecuación:

Si tomamos $x = 0$ y sustituimos en la segunda ecuación obtenemos $y = 2$.

Si tomamos $x = 1$ y sustituimos en la segunda ecuación obtenemos $y = 0$.

Dibujando ambas rectas se observa que el único punto en el que se cortan es el (1, 0), que es la solución del sistema.



El inconveniente de este método es que en algunos casos no se ve claramente cuales son las coordenadas del punto o puntos de intersección. Por ello recurriremos a otros métodos más analíticos.

Método de igualación

Consiste en despejar de las dos ecuaciones del sistema la misma incógnita e igualar las expresiones obtenidas. Como resultado de ello se obtiene una ecuación con una incógnita que se ha de resolver. Las soluciones de esta ecuación se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener los valores de las otras incógnitas.

Ejemplo 3: Resolver el sistema no lineal $\begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ 6x + y = -5 \end{cases}$

Despejando la variable y de las dos ecuaciones queda $\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = -5 - 6x \end{cases}$

Igualando estas dos expresiones se obtiene $2x^2 - 1 = -5 - 6x$

Pasando todos los sumandos al primer miembro queda $2x^2 + 6x + 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtiene $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \dfrac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de x en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda, se obtiene:

$x = -1 \Rightarrow y = -5 + 6 = 1$ $\qquad$ $x = -2 \Rightarrow y = -5 + 12 = 7$

Luego las soluciones del sistema son (-1, 1) y (-2, 7).

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra. De esta forma se obtiene una ecuación con una incógnita que una vez resuelta nos proporciona los valores de dicha incógnita. Sustituyendo estos valores en la expresión obtenida al despejar la otra incógnita, permite encontrar la solución buscada.

Ejemplo 4: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 6y + 3 = 0 \\ x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$

Para buscar su solución por el método de sustitución se elige una incógnita para despejarla, en este caso lo más sencillo es despejar x de la segunda ecuación quedando $x = 1 - 5y$.

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación se obtiene $2(1 - 5y) - 6y + 3 = 0$, es decir, $-16y + 5 = 0$.

Despejando y se obtiene $y = \dfrac{5}{16}$.

Al sustituir este valor en $x = 1 - 5y$ queda $x = 1 - 5\dfrac{5}{16} = -\dfrac{9}{16}$.

Luego la solución del sistema es $x = -\dfrac{9}{16}$, $y = \dfrac{5}{16}$.

Método de reducción

Consiste en sustituir una de las ecuaciones del sistema $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ por la ecuación $tf(x,y)+sg(x,y)=0$ con *t, s* números reales no nulos. El nuevo sistema obtenido es equivalente al inicial y por ello con igual solución.

Teniendo en cuenta lo anterior, el método de reducción se basa en elegir *t* y *s* de forma que la ecuación $tf(x,y)+sg(x,y)=0$ permita o bien calcular los valores de una de las incógnitas, o bien obtener una relación sencilla entre las dos incógnitas.

Ejemplo 5: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ 3x+2y+8=0 \end{cases}$

Para obtener una ecuación sin la incógnita *x* se multiplica la primera ecuación por 3, la segunda por -2 y se suman quedando

$$\begin{array}{r} 6x - 15y - 3 = 0 \\ \underline{-6x - 4y - 16 = 0} \\ -19y - 19 = 0 \end{array}$$

La nueva ecuación obtenida es $-19y - 19 = 0$ y sustituyendo la segunda ecuación por ella se obtiene el sistema $\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ -19y-19=0 \end{cases}$ que es equivalente al inicial.

Despejando *y* de la segunda ecuación obtenemos $y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación queda $2x + 5 - 1 = 0$ y por lo tanto $x = -2$. Luego la solución del sistema es (-2, -1).

Ejemplo 6: Resolver el sistema $\begin{cases} -8x+8y+x^3=0 \\ 8x-8y+y^3=0 \end{cases}$

Para obtener una relación más sencilla entre las incógnitas sumamos las dos ecuaciones quedando $y^3+x^3=0$. El sistema $\begin{cases} -8x+8y+x^3=0 \\ y^3+x^3=0 \end{cases}$ es equivalente al dado y para resolverlo despejamos y^3 de la segunda ecuación obteniéndose $y^3=-x^3$, y por lo tanto, $y = -x$.

Al sustituir este resultado en la primera ecuación se obtiene $-16x+x^3=0$, es decir, $x(-16+x^2)=0$.

Al resolver esta ecuación se obtiene $x=0$ y $(-16+x^2)=0$, por lo tanto, $x=0$, $x=\sqrt{16}=4$ y $x=-\sqrt{16}=-4$.

Hallando los correspondientes valores de *y* se obtienen las soluciones del sistema que son (0, 0), (4, -4), (-4, 4).